

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Física

Caio Leite Faustino

**TRANSIÇÕES DE FASE EM BUSCAS
ALEATÓRIAS NO REGIME DE BAIXAS
DENSIDADES DE ALVOS**

Curitiba - PR
2013

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Física

Caio Leite Faustino

**TRANSIÇÕES DE FASE EM BUSCAS
ALEATÓRIAS NO REGIME DE BAIXAS
DENSIDADES DE ALVOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz
Co-orientador: Dr. Madras Gandhi Viswanathan

Curitiba - PR
2013

Em especial,

*Aos meus amores,
minha Mãe Ofelia e minha Vó Vanilda, pelo carinho e amor inigualável.
À minha esposa,
Daniela Bezerra, pelo companheirismo, amor e compreensão.*

Agradecimentos

A realização desta Tese seria bastante difícil sem a motivação ou participação das pessoas as quais vou citar. No contexto familiar, sem dúvida devo meus agradecimentos à minha mãe Ofelia e minha vó Vanilda, fontes de inspiração e responsáveis por minha educação em todos os níveis, ajudando a superar as dificuldades, acreditando e permitindo que ocorressem dias melhores em cada etapa da minha vida pessoal e profissional. A elas devo-lhes praticamente tudo. Aos meus irmãos Rafael, Camila, Juliana e Fernanda, por me colocarem no desafio do irmão mais velho, de dar o exemplo em caminhos e posturas que devemos adotar em nossas vidas. Ao meu Pai, pelos poucos mas felizes momentos de conversas. Ao Toni, ao Sr. Érico Baracho (in memoriam) e à Dona Antonieta, amigos de vida e pessoas que nunca esquecerei. À minha esposa Daniela, pelo infinito amor dado, pelo companheirismo e por acreditar na minha capacidade de concretização deste trabalho tão importante.

No âmbito profissional, agradeço em primeiro lugar ao meu Amigo e Orientador desta tese, Prof. Marcos Gomes. Sua humildade, amizade e apoio em todos os momentos pessoais e profissionais ao longo dos 10 anos que nos conhecemos, são fatores preciosos e dignos de grande carinho e reconhecimento, um verdadeiro amigo. Ao Prof. Madras Gandhi, por ter sido a primeira pessoa a qual me deu a oportunidade de seguir o caminho científico, por fazer parte dos principais e importantes momentos em minha vida, por me ensinar que pessoas inteligentes e de elevado conhecimento se tornam mais admiráveis quando são humildes e compreensíveis com os diversos contextos e pessoas em nosso cotidiano. Esse é o professor e amigo Gandhi. Aos diversos amigos e professores do Departamento de Física da UFPR, em particular ao amigo Marcos Santos, por seu apoio nas variadas ferramentas computacionais necessárias para a realização deste trabalho, ao amigo Bruno, pelos momentos de distração, ao Prof. Carlos Fiore pelas diversas conversas, pela colaboração científica e pelo apoio de hospitalidade em meus momentos em Curitiba. Aos Professores Márcio Bettega, Marcus Beims, Miguel Abbate, Rodrigo Mossanek, Sérgio Sanchez, Alexandre Ribeiro e Fernando Devecchi, pela companhia e bate papo nos horários de almoço, no café da tarde, nas escaladas em montanhas, nas brincadeiras etc.

Por fim, agradeço ao apoio dos órgãos de financiamento CAPES e CNPq, à estrutura computacional deste Departamento de Física, ao *Cluster* multiusuário da UFPR - LCPAD - meio pelo qual realizei diversas simulações. Ao *Cluster* do Departamento de Física Teórica e Computacional da UFRN, que me auxiliou nas simulações finais desta Tese. E ao grupo FISUX, por sua colaboração e suporte computacional nas atividades acadêmicas.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê”

(Arthur Schopenhauer)

Resumo

Neste trabalho, analisamos o problema de busca aleatória e suas propriedades estatísticas no contexto de otimização. Em particular, na situação de baixas densidades de alvos, investigamos a emergência de transições de fase. Muitas são as áreas onde tal tipo de dinâmica é importante. Em especial citamos buscas em biologia, conhecidas como forrageamento. De fato, constantemente organismos interagem uns com os outros, com os mais variados propósitos: alimentação, busca por parceiros para reprodução, defesa do território, etc. Desta forma, a otimização da busca torna-se uma necessidade real, especialmente na situação de baixas densidades de alvos, quando eventualmente organismos e até espécies inteiras podem ser levadas à extinção. Para modelar o problema, primeiro consideramos um sistema unidimensional no qual os alvos (objetos de busca) podem se mover num determinado ambiente de busca. Um buscador (agente de busca), sem prévia informação sobre a localização dos alvos, se movimenta pelo ambiente e captura um alvo cada vez que o mesmo entra em um raio de visão r_v do buscador. Tanto os alvos quanto o buscador são caminhantes aleatórios, cujos passos são determinados por uma lei de potência $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ e as direções escolhidas de forma aleatória. Para $1 < \mu < 3$ temos a situação de caminhadas superdifusivas e $\mu \geq 3$ caracteriza caminhadas brownianas. Variando μ temos diferentes estratégias de buscas, que são então estudadas para diferentes cenários. Há um custo energético ao buscador durante sua movimentação e um ganho de energia cada vez que captura um alvo. O balanço entre estes dois fatores determina quando a busca é ou não eficiente. Fazendo-se médias sobre populações, podemos determinar uma taxa de sobrevivência de buscadores, em particular nos casos onde há escassez de alvos, no limiar da extinção. Verificamos que quando as condições são escassas (baixa densidade de alvos, ou alto custo energético da dinâmica), é necessário que os buscadores se tornem superdifusivos para a taxa de sobrevivência não tender a zero. Na verdade, mostramos que esta taxa é um bom parâmetro de ordem para caracterizar a busca aleatória como um fenômeno crítico. Assim, transições de fase contínuas surgem naturalmente no limiar de condições de sobrevivência ou extinção dos buscadores. Investigamos os expoentes críticos das transições e mostramos que os mesmos não dependem (dentro de erros numéricos aceitáveis) dos expoentes μ_s e μ_t , respectivamente adotados pelo buscador e alvo em suas estratégias de locomoção. Porém, notamos que os expoentes críticos podem depender dos valores dos parâmetros energéticos do problema, tais como energia inicial ξ_0 , custo por locomoção α , e ganho com a detecção de alvo g . Por fim, os resultados iniciais e exploratórios indicam a presença de transições de fase também em espaços bidimensionais, porém com um maior (menor) grau de sensibilidade às variações de densidade de alvos (às estratégias de buscas adotadas). Neste trabalho mostramos

então que uma apropriada caracterização de transições de fase é um ponto fundamental para a compreensão de processos dinâmicos de buscas aleatórias na borda da extinção.

Palavras-chave: Dinâmica de Busca, Voos de Lévy, Caminhada Aleatória, Transições de Fase.

Abstract

In this paper, we analyze the problem of random search and its statistical properties in the context of optimization. In particular, in the situation of low densities of targets, we investigate the emergence phase transitions. There are many areas where this type of dynamic is important. Especially we cite searches in biology, known as foraging. Indeed, organisms constantly interact with each others, with the most varied purposes: food, search partners for reproduction, territorial defense, etc. Thus, Optimization of the search becomes a real need, especially in situation low densities of targets, when eventually organisms and even entire species could be driven to extinction. For model the problem, first consider a one-dimensional system in which the targets (objects search) can move a given search environment. A searcher (agent search), without prior Information about the location of targets, moving the environment and capturing a target each time it enters a vision radius r_v the searcher. Targets and searcher are random walkers, whose steps are determined by a power law $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ and directions chosen so random. For $1 < \mu < 3$ we have the situation of superdiffusive walks and $\mu \geq 3$ characterizes Brownian walks. Varying μ have different search strategies, which are then studied for different scenarios. There is an energy cost to searcher during its movements and a gain of energy when it captures a target. The balance between these two factors determines when the search is efficient or not. Making up averages about populations, we can determine a survival rate searches, particularly in cases where there is scarce of targets, on the edge of extinction. We found that when conditions are scarce (low density targets or high energy cost of dynamic) show that it is necessary that the searchers become superdifusivos for survival rate not tend to zero. Indeed, we show that this rate is a good order parameter to characterize search random as a critical phenomenon. Thus, phase transitions arise naturally in the continuous threshold conditions for survival or in the extinction of the searchers. We investigate the critical exponents of transitions phase and show that they are not dependent (within the error acceptable numerical) of the exponents μ_s and μ_t respectively adopted by the searcher and target their strategies for locomotion. However, we note that the critical exponents may depend on the values energy parameters of the problem, such as initial energy ξ_0 , locomotion cost by α , and gain of energy on the detection of target g . Finally, exploratory and preliminary results indicates the presence of phase transitions in two-dimensional spaces as well, but with a higher (lower) level of sensitivity to variations in density targets (to the search strategy adopted). We show then that a proper characterization of phase transitions is a point fundamental to the understanding of dynamic processes search random on the edge of extinction.

Keywords: Search Dynamics, Lévy Flights, Random Walk, Phase Transitions.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	viii
Sumário	ix
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xx
1 Introdução	1
1.1 O Problema da Busca Aleatória e o Contexto de Forrageamento Ecológico	1
1.2 Contexto Histórico e Motivações do Modelo Usado	2
1.3 Problema Abordado e Organização da Tese	4
2 Fundamentos Teóricos	7
2.1 Distribuição Normal	7
2.2 Teorema Central do Limite	11
2.2.1 A Generalização do Teorema e as Distribuições α -Estáveis de Lévy	15
2.3 Voos e Caminhadas de Lévy	19
2.4 Caracterização dos Alvos e Dimensionalidade	22
2.5 Sistemas Complexos	24
2.6 Fenômenos Críticos e as Transições de Fase	25

2.6.1	Leis de Escala de Tamanho Finito e a Renormalização Numérica Fenomenológica	29
2.6.2	Classes de Universalidade	30
3	Dinâmica de Busca em Redes Unidimensionais	32
3.1	O Problema	32
3.2	Modelo de Busca	33
3.3	Efeitos de Discretização do Espaço de Busca	36
3.4	Evolução Energética	38
3.5	Taxa de Sobrevivência	41
4	Dinâmica das Transições de Fase em Buscas 1D	45
4.1	Expoentes Críticos Dinâmicos	45
4.1.1	O Expoente β/ν_{\parallel}	47
4.1.2	Os Expoentes ν_{\parallel} e ν_{\perp}	49
4.2	Discussões Sobre os Resultados Obtidos	53
4.3	A Dinâmica de Busca para Alvos Estáticos	58
4.3.1	O Cálculo de $\langle L \rangle$ e $\xi(t)$	59
5	Efeitos Estatísticos da Variação dos Parâmetros Energéticos	65
5.1	O Efeito da Energia Inicial ξ_0	67
5.2	A Variação Proporcional dos Parâmetros Energéticos	72
5.3	O Efeito do Custo Energético α	74
5.4	O Efeito do Ganho Energético g	77
5.5	Tempo de Autonomia Inicial (τ) e Efeitos Estatísticos	82
6	Dinâmica de Busca no Espaço Bidimensional: Formulação do Problema e Resultados Iniciais	88
6.1	O Modelo	89
6.1.1	Variação no Tamanho do Ambiente	89
6.1.2	Variação no Número de Alvos	91
6.2	Evolução Energética	92
6.3	Taxa de Sobrevivência	95
6.4	A Física de Movimentos Ecológicos: Considerações Finais	97

7 Conclusão e Perspectivas	100
A O Método de Inversão	104
B O Algoritmo de Busca	108
B.1 Dinâmica 1D	108
B.2 Dinâmica 2D	111
C Uma Proposta de Mapeamento: Busca Aleatória \Rightarrow Percolação Direcionada	114
C.1 Um Breve Resumo da Teoria de Percolação	114
C.2 Percolação numa Rede Quadrada com Estado Absorvedor	118
C.3 O Mapeamento	120
D Publicações	126
Referências Bibliográficas	128
Índice Remissivo	138

Lista de Figuras

2.1	Um exemplo da caminhada aleatória browniana, markoviana e bidimensional, contendo um conjunto de $N = 10.000$ passos unitários realizados. Os eixos no sistema de coordenadas representam as respectivas posições em x e y	8
2.2	Exemplo de uma distribuição normal para diferentes valores de média μ e variância σ^2	10
2.3	Função densidade das distribuições estáveis e simétricas $S\alpha S$ para diferentes valores de α	18
2.4	Distribuição de Lévy para distintos valores da dispersão γ e da localização β	19
2.5	Diferentes caminhadas de Lévy, variando conforme μ . Quando $\mu \rightarrow 1^+$, a caminhada torna-se mais superdifusiva, tendendo a um movimento balístico. Por Outro lado, para $\mu \geq 3$ a caminhada tende a um movimento Browniano.	21
2.6	Em (a) temos a magnetização M indo continuamente para a fase desordenada (desmagnetizada). Já em (b), a magnetização M sofre uma transição descontínua para a fase desordenda no ponto crítico T_c [93]	28
2.7	Esquema que mostra as quantidades e condições elementrares para analisar uma transição de fase.	28

3.1	Um exemplo da dinâmica do modelo numa rede discreta: (a) o buscador, caracterizado pela cor azul, começa a caminhar na posição x_j (as bolas na rede representam as possíveis posições a serem ocupadas pelos caminhantes). Escolhido um sentido de deslocamento e comprimento de caminhada ($\ell_j = 2$ para a direita) ele vai até a posição x_{j+2} verificando em cada sítio se há um alvo em seu raio de visão r_v . Como nenhum alvo é encontrado, ele escolhe uma nova configuração de voo ($\ell_{j+1} = 1$ para a esquerda) e continua a dinâmica de busca. Por outro lado e de maneira simultânea, o alvo (simbolizado pela cor vermelha) começa na posição x_i e escolhe uma configuração de caminhada ($\ell_i = 3$ para a direita) indo até a posição x_{i+3} , passo a passo. Notemos que $t = 3$, isto é, 3 passos ocorreram durante essa parte da simulação. (b) A dinâmica obedece a uma condição periódica de contorno. Em (c) temos os casos possíveis de encontro, onde $ x_j - x_i \leq r_v$. Nesta situação o alvo é capturado e um novo surge numa posição aleatória da rede, dando continuidade à dinâmica.	35
3.2	As figuras representam as frequências do tamanho dos saltos escolhidos (e seus respectivos histogramas) para espaços de buscas discretas e contínuas, tomando como base três parâmetros de difusão ($\mu = 3, 0$, $\mu = 2, 0$ e $\mu = 1, 1$) e dois valores de rede: $z = 116$ (fig. acima) e $z = 54$ (fig. abaixo). A concordância quantitativa da distribuição de voos, leva à similaridade dinâmica do modelo, independente das características do espaço de busca.	37
3.3	(a) O ganho energético em função da densidade efetiva normalizada $\rho = g/z$ para várias combinações de μ . (b) Comportamento do ganho energético próximo à extinção. (c) Ganho energético na escala mono-log, ajudando a evidenciar a região de densidade crítica [45].	39
3.4	Evolução energética ao longo do tempo para três pares de difusão (μ_s, μ_t) (as demais combinações de μ apresentam o mesmo comportamento qualitativo e não são mostradas aqui para não sobrecarregar a figura). A linha vermelha retrata o valor de ρ onde não há evolução da energia (independente do tempo de busca), caracterizando, portanto, a quantidade ρ_c . Notamos que para $\rho < \rho_c$ (curvas abaixo da linha vermelha) a dinâmica segue para extinção. Para $\rho > \rho_c$ (curvas acima da linha vermelha) a dinâmica segue para a sobrevivência do buscador.	40
3.5	Comportamento estatístico de $\Gamma(\lambda, t)$ versus λ para diferentes valores de t , onde $\mu_s = 2, 0$ e $\mu_t = 2, 0$. A função $\Gamma(\lambda, t)$ demonstra ser contínua à medida que $\lambda \rightarrow \lambda_c$ e $t \rightarrow t_{max}$	43
3.6	A Taxa de Sobrevivência como função de λ para outros pares de difusão buscador-alvo em três tempos distintos. Para $\mu_s = \mu_t = 2, 0$ e $t = 51.200$, mostramos como se comporta a curva de $\Gamma(\lambda)$ e sua correspondente variação normalizada (curva pontilhada).	44
4.1	A função $k(t, t_0, \lambda)$ versus λ . Os valores de λ_c dependem de μ_s e μ_t , mas não dos pares t e t_0	46

4.2	Escala log-log de $\Gamma(t)/\Gamma(t_0)$ vs. (t/t_0) para vários valores de λ , sendo $t_0 = 100$. Em (a) temos o caso $\mu_s = \mu_t = 2,0$ onde a linha vermelha mostra um “fitting” na região onde $\lambda \sim \lambda_c$, mostrando a presença de uma lei de potência com expoente dado justamente por $\beta/\nu_{\parallel} \approx 0,425$. As figuras menores mostram os valores dos expoentes para as demais combinações de busca.	47
4.3	Relação aproximadamente linear μ_s vs. λ para diferentes valores de μ_t . . .	48
4.4	Em (a) temos a função $h(t, t_0, \lambda)$ em função de t/t_0 para várias valores de λ . À medida que $\lambda \rightarrow \lambda_c$, mais as curvas tendem a uma reta. No instante em que $\lambda \approx \lambda_c$ (b), o <i>fitting</i> dos pontos gera uma reta com coeficiente angular igual a $1/\nu_{\parallel}$. Esse típico caso retrata a situação onde $\mu_s = \mu_t = 2,0$ e $t_0 = 100$. Para as demais combinações, valores similares de $1/\nu_{\parallel}$ são obtidos, conforme visto acima.	50
4.5	(a) Um exemplo de como se relaciona a distância percorrida $\langle L \rangle$ e a densidade de alvos λ para vários valores de t 's e $\mu_s = \mu_t = 3,0$. Em (b) temos o comportamento da derivada segunda de $\langle L \rangle$, cujo valor nulo se aproxima de λ_c quando $t \rightarrow \infty$	51
4.6	(a) A evolução da distância percorrida conforme a densidade de alvos para a $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$. As figuras (b) e (c) apresentam um paralelo da dinâmica energética variando com o tempo e com a distância. No ponto crítico, a energia tende a não evoluir.	52
4.7	(a) Escalando $L(t)/L(t_0)$ vs. t/t_0 para diferentes densidades até o limite $\lambda \rightarrow \lambda_c$ para $\mu_s = \mu_t = 2,0$. Em $\lambda \approx \lambda_c$ determina-se o expoente $\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}$ como sendo o coeficiente angular da reta que fita os pontos em (b).	53
4.8	Obtendo ν_{\perp} para as demais combinações de caminhada.	53
4.9	$Ne(\lambda)$ vs. t para vários valores de λ nos casos (a) $\mu_s = \mu_t = 3,0$, (b) $\mu_s = \mu_t = 2,0$ e (c) $\mu_s = \mu_t = 1,1$. Em todos os gráficos, que estão numa mesma escala, quando $\lambda \approx \lambda_c$, o comportamento de Ne é praticamente o mesmo, seguindo uma lei de potência nesse limiar.	56
4.10	Um exemplo de como a variância da taxa de sobrevivência se comporta quando $\lambda \rightarrow \lambda_c$ para alguns tempos de busca na situação $\mu_s = \mu_t = 3,0$. .	57
4.11	Uma alternativa de visualização da Taxa de Sobrevivência	58
4.12	A evolução temporal da taxa de sobrevivência do ponto de vista de uma grade de sítios (cada figura representa um tempo específico de análise). O exemplo mostra 500 buscadores analisado para cada densidade λ . Os pontos pretos indicam a sobrevivência do buscador j após t . Conforme a rede aumenta, menos são os sítios ativos até o limite em que nenhum buscador sobreviver - baixíssimas densidades.	59
4.13	Aproximação analítica para a energia líquida considerando alvos fixos. O parâmetro de difusão μ é referente ao buscador e vai do regime browniano ($\mu = 3,0$) até o balístico ($\mu \rightarrow 1^+$). Aqui, $d = z$ (comprimento da rede) e $N = L = t$ (tempo de busca ou distância viajada). Figura retirada de [45].	62

4.14	A evolução de energia do buscador ξ_t para o caso onde os alvos são estáticos e para diferentes estratégias de caminhada do buscador. Em (a) temos $\xi(t)$ versus o parâmetro de controle das transições, λ . Em (b) $\xi(t)$ versus ρ , permitindo a comparação com a figura 3.3 (alvos dinâmicos) e com a figura 4.13 (aproximação analítica para alvos fixos).	63
4.15	Em (a) temos a taxa de sobrevivência $\Gamma(\lambda, t)$ versus a densidade de alvos λ na rede para o modelo de alvos fixos, variando o parâmetro de busca μ do buscador durante um tempo t . Claramente notamos a eficiência da busca balística sobre a browniana, apesar dos pontos críticos estarem em regiões de menor valor λ_c quando comparados ao caso dinâmico. A função $k(t, t_0, \lambda)$ em (b), representa a renormalização numérica de forma análoga ao abordado para alvos dinâmicos. As curvas para cada valor de μ cruzam muito aproximadamente num mesmo ponto, indicando também uma universalidade dos expoentes. Além disso, tais valores são os mesmo se comparados ao modelo de alvos dinâmicos, sugerindo que os expoentes de transição independem da dinâmica ou estaticidade dos alvos.	64
5.1	Evolução energética vs. tempo de busca para alguns valores da energia inicial ξ_0 (fixados $\alpha = 1$ e $g = 100$) num típico caso $\mu_s = \mu_t = 2, 0$. Um mesmo comportamento qualitativo é observado para outras combinações de caminhada.	66
5.2	O parâmetro de ordem $\Gamma(z, t)$ vs. o comprimento de rede z para (a) dois específicos valores da energia inicial e alguns tempos de busca. Em (b) temos o comportamento de Γ para alguns valores de ξ_0 no limite de longos tempos. Todas as situações foram simuladas para o caso $\mu_s = \mu_t = 2, 0$, tomados constantes os parâmetros $\alpha = 1$ e $g = 100$.	68
5.3	O número de encontros Ne variando com o tempo para algumas combinações de $\mu_{s,t}$ em seus respectivos valores críticos. A variação das cores indica a mudança de ξ mantidos α e g constantes.	69
5.4	Aumentando a energia inicial para $\xi_0 = 400$ e mantendo fixo $\alpha = 1$ e $g = 100$ (aqui $\mu_s = 3, 0$ e $\mu_t = 3, 0$), ou seja, aumentando o tempo de autonomia inicial da busca, vemos que a região de localização do ponto crítico z_c não coincide com um ponto da rede no modelo de buscas discretas (a), podendo ocupar valores intermediários num comprimento $z < z_c < z + 1$. Porém no modelo de buscas contínuas (c), a localização de z_c torna-se muito mais precisa. Em (b) temos uma solução que fornece uma estimativa do valor z_c em redes discretas, onde a curva original passou por um processo de regressão polinomial de ordem a se ajustar com os dados. Tais resultados são similares para as demais combinações μ_s e μ_t .	70
5.5	Similar à figura 5.4, porém considerando $\mu_s = 2, 0$ e $\mu_t = 2, 0$. Em (d) o modelo discreto e em (e) o modelo discreto ajustado (fitting).	71

5.6	No limite em que $\xi_0 = 25.600$ e para um tempo de simulação 10^7 , o modelo de busca discreta perde informações sobre as quantidades medidas em torno de ponto crítico. O mesmo não ocorre para o modelo contínuo, onde a rede de comprimento fracionário garantem a caracterização do ponto crítico que divide as fases do sistema. Aqui, $\alpha = 1$, $g = 100$, $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$	71
5.7	A evolução da energia com o tempo para um dado buscador. As três curvas são para uma mesma dinâmica de busca, apenas supondo que em cada evento de encontro o ganho é de $g = 100$, $g = 200$ e $g = 400$ unidades de energia. Também temos respectivamente $(\xi_0 = 100, \alpha = 1)$, $(\xi_0 = 200, \alpha = 2)$ e $(\xi_0 = 400, \alpha = 4)$. Aqui $z \approx z_c$ e $\mu_s = \mu_t = 2,0$	73
5.8	Mesmas condições que a figura 5.7 mas em altas densidades.	73
5.9	O número de alvos encontrado $N_e(t)$ em função do tempo de busca para algumas variações proporcionais dos parâmetros energéticos na região crítica, com $\mu_s = \mu_t = 2,0$. O comportamento de N_e é muito similar para qualquer variação proporcional adotada.	74
5.10	A energia média evoluindo com o tempo t . O mesmo comportamento qualitativo num específico tamanho de rede z_c mostra que a localização dos pontos críticos é a mesma, independente do par μ_s e μ_t adotados. O aumento dos parâmetros energéticos apenas translada a curva de energia, mantendo as demais características do sistema. Aqui temos $\mu_s = \mu_t = 2,0$	74
5.11	Em (a) temos as distribuições de energia na densidade crítica depois de um tempo longo de busca 10^5 para alguns conjuntos de parâmetros energéticos variados proporcionalmente. Já em (b) temos tais distribuições no final do tempo de autonomia τ . Nesta figura, $\mu_s = \mu_t = 2,0$. Resultados similares são obtidos para as demais combinações de caminhada.	75
5.12	O aumento de α (a partir do caso típico $\xi_0 = 100$, $\alpha = 1$ e $g = 100$), para o conjunto $\xi_0 = 200$, $\alpha = 2$ e $g = 100$, onde foram mantidos constantes τ e g . O ponto crítico z_c não está localizado num tamanho inteiro da rede quando $\alpha = 2$. Aqui, $\mu_s = \mu_t = 2,0$. Ou seja, não há um z inteiro para o qual $\langle \xi(t) \rangle$ coincide com a linha tracejada esquemática.	76
5.13	O aumento de α (a partir do caso típico $\xi_0 = 100$, $\alpha = 1$ e $g = 100$), para o conjunto $\xi_0 = 400$, $\alpha = 4$ e $g = 100$, também mantidos constantes τ e g ($\mu_s = \mu_t = 2,0$). À medida que α aumenta, mais improvável é de obter z_c num dado tamanho inteiro z . A figura menor confirma que a energia média em $z = 28$ não permanece em torno de $\xi_0 = 400$, portanto não sendo o tamanho de rede crítico.	77
5.14	A taxa de sobrevivência $\Gamma(z, t)$ vs. o comprimento de rede z , mantidas constantes as quantidades g e τ ($\mu_s = \mu_t = 2,0$). Variando α observamos a mudança no ponto crítico das transições.	78

5.15	A renormalização numérica $k(t, t_0, z)$ para alguns conjuntos de parâmetros em função de z ($\mu_s = \mu_t = 2, 0$). Notamos que o aumento de α provoca o cruzamento entre as curvas num ponto que não corresponde a um valor de tamanho de rede z simulado (exceto para a situação típica $\xi_0 = 100$, $\alpha = 1$ e $g = 100$).	79
5.16	Em (a) temos o efeito do ganho por encontro no parâmetro de ordem do sistema $\Gamma(z, t)$. Para cada conjunto de parâmetros energéticos, a região crítica z_c aumenta conforme é o aumento de g . Entretanto, como mostrado em (b), (c) e (d), a maneira como $\Gamma(z)$ se comporta nas proximidades da região crítica (mantidas as escalas para análise), difere para cada conjunto de parâmetros. Isto sugere que os expoentes críticos que caracterizam a transição são diferentes. Aqui $\mu_s = \mu_t = 2, 0$ e tais análises para os demais pares de caminhada são similares.	80
5.17	Renormalização numérica para três conjuntos de parâmetros energéticos onde é variada a energia g de ganho por alvo e $\mu_s = \mu_t = 2, 0$. Note que o cruzamento não se dá no mesmo valor de k para cada valor de g	81
5.18	Distribuição de energia para diferentes conjuntos de parâmetros (mantendo ξ_0 e α fixos e variando apenas g para $\mu_s = \mu_t = 2, 0$) na região crítica de cada conjunto. Os resultados mostram que esse tipo de variação energética gera distribuições diferentes para cada conjunto analisado, indicando que a dinâmica possui comportamentos distintos na região crítica, portanto alterando os valores dos expoentes críticos.	82
5.19	O número de encontros N_e em função do tempo para diferentes conjuntos de parâmetros e $\mu_s = \mu_t = 2, 0$. Após o tempo inicial de autonomia de caminhadas τ , a dinâmica de busca gera diferentes configurações do número de encontros com alvos conforme o tempo evolui.	83
5.20	Um típico caso ($\mu_s = \mu_t = 2, 0$) onde os efeitos do tempo de autonomia inicial são observados. O decaimento de τ altera a forma de $\Gamma(z, t)$ nas proximidades do ponto crítico se t/τ não é grande o suficiente. Porém, a densidade crítica é mantida haja visto que a razão g/α permanece constante	84
5.21	Distribuições de energia diferentes conforme varia τ , mantido constante α e g ($\mu_s = \mu_t = 2, 0$). Portanto dinâmicas diferentes são geradas (como visto em (i) e (ii)), onde tais conjuntos de parâmetros apresentam distribuições de energia distintas mesmo após um longo tempo t	85
5.22	Os expoentes β e $\nu_{ }$ no caso $\mu_s = \mu_t = 2, 0$. Tais resultados indicam que os expoentes críticos são distintos (com relação aos seus respectivos conjuntos de parâmetros) porque a dinâmica de busca possui distribuições de energia diferentes. Nesta figura, a análise de escala é feita para $t_0 = 100$	86
5.23	Em (a) temos a dispersão dos expoentes $\beta/\nu_{ }$ (dento de um dado conjunto de parâmetros) para várias estratégia de caminhada μ_s e μ_t . Em (b) a dispersão é observada para o expoente $1/\nu_{ }$. Em ambas as figuras, é usado $t_0 = 100$ para a devida análise de escala.	87

6.1	Ganho energético como função da densidade efetiva de alvos g/z^2 . Na figura menor, o comportamento das curvas que representam alguns conjuntos de combinações de difusão próximo à extinção.	93
6.2	O comportamento da densidade crítica de sobrevivência para diversas combinações de μ_s e μ_t	95
6.3	Variação energética para o modelo de alvos variáveis. O comportamento balístico $\mu_s = \mu_t = 1,1$ mostra ser mais eficiente quando comparado à dinâmica browniana $\mu_s = \mu_t = 3,0$. As curvas de energia foram geradas para uma rede 128×128 para baixas densidades de alvos, $n_A \in [1, 32]$. . .	96
6.4	Caminhada 2D para os casos $\mu = 3,0$, $\mu = 2,0$ e $\mu = 1,1$ considerando uma rede quadrada 128×128 . Nota-se que o caso balístico visita muito mais regiões na rede quando comparado ao caso browniano.	97
6.5	Taxa de sobrevivência vs. área de busca para alguns valores de μ_s e μ_t . Cada conjunto de curva aborda três tempos de simulação: $t = 100$, $t = 400$ e $t = 51.200$	98
C.1	Nesta figura podemos ver o caso onde não há percolação (figura à esquerda) e onde há percolação (figura à direita) em uma rede quadrada finita 8×8 . Em ambas as figuras existem mais de 1 <i>cluster</i> . Mas é apenas o <i>cluster</i> em vermelho (formado por sítios ativos, onde cada sítio apresenta ao menos 1 sítio vizinho ativo) que consegue atravessar a rede de um lado a outro, portanto percolando.	115
C.2	Um exemplo de uma percolação por ligação - <i>bond percolation</i> . A percolação existe uma vez que a rede foi conectada de um extremo ao outro por ligações entre sítios, denotado pela linha em vermelho.	116
C.3	Aspecto qualitativo da probabilidade de percolação P em função da probabilidade de ativação dos sítios p	117
C.4	Rede quadrada no forma diagonal. Um sítio na linha l apenas será ativado se houver, no mínimo, 1 sítio na linha $l - 1$ ativado. Em (a) temos o caso onde a probabilidade de conexão é máxima $p = 1$, portanto todas as ligações são abertas, formando assim um único e grande <i>cluster</i> . Em (b), um exemplo onde $0 < p < 1$, onde nem todas as ligações estão abertas. Nesses casos, todos os <i>clusters</i> formados necessariamente estão conectados à fonte/origem. A percolação existe quando há ao menos 1 <i>cluster</i> que vai do sítio/fonte na linha 0 até algum sítio ativo na N-ésima linha e extremo da rede.	118
C.5	Em (a) temos o mecanismo clássico da percolação direcionada para uma certo valor p . Em (b) foi colocado o efeito de parede absorvente no mesmo esboço de (a). Notamos que a parede absorve todas as ligações abertas dos sítios localizados em $x = -1$, onde $(t = 0, x = 0)$ representa as coordenadas do primeiro sítio na origem.	120

C.6	O conjunto de figuras está relacionado à formação de <i>clusters</i> para diferentes densidades de rede nos casos $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$. (a) Em altas densidades de alvos um número maior de <i>clusters</i> conseguem percolar em relação a baixas densidades (d). As figuras (b) e (c) representam situação críticas, no limiar da transição entre as fase que percolam e que não percolam. Os pontos em vermelho indicam os pontos onde houve absorção (“presença da parede”) e os pontos em verde indicam os <i>clusters</i> que conseguiram percolar.	123
C.7	Conjunto de figuras para $(\mu_s = 1,1, \mu_t = 1,1)$ e $(\mu_s = 3,0, \mu_t = 3,0)$ nos limites de altas densidade (a), baixas densidades (d) e críticos (b) e (c). Comportamentos similares são observados independente do tipo de difusão adotado pelos buscadores e alvos.	124
C.8	Taxa de sobrevivência em função do tempo $\Gamma(t, \lambda_c)$ vs. t na rede crítica para algumas combinações de μ_s e μ_t dos caminhantes	125

Lista de Tabelas

3.1	Densidades críticas conforme conjuntos de parâmetros μ_s e μ_t [45]. Nota-se a eficiência na estratégia de busca balística $\mu_{s,t} \rightarrow 1^+$ sobre as demais combinações de $\mu_{s,t}$. A otimização, portanto, foge do comportamento browniano.	41
4.1	Valores críticos conforme estratégias de busca.	52
5.1	O efeito da variação proporcional dos parâmetros energéticos nos expoentes críticos. Nesse caso, nenhuma mudança significativa é observada nos expoentes, independente do conjunto de parâmetros ou das estratégias de busca.	75
5.2	Variando a energia ganha por encontro g e mantendo ξ_0 e α constantes. Os efeitos sobre os expoentes críticos indicam diferentes classes de universalidade, entretanto mantendo uma similaridade entre os expoentes dentro de cada conjunto, para diferentes estratégias de busca.	83
5.3	Expoentes críticos para diferentes parâmetros de busca quando o tempo de autonomia inicial τ é variado. Assim como na seção anterior, os resultados sugerem a existência de classes de universalidade, como uma consequência de diferentes dinâmicas de buscas (ou “ensembles” de energia) para determinados tipos de variações dos parâmetros.	87
6.1	Densidades críticas para vários conjuntos de μ_s e μ_t	94
C.1	Probabilidades críticas para algumas geometrias de rede e expoentes críticos para $d = 2$ e $d = 3$ obtidos na percolação usual e direcionada.	117

Introdução

1.1 O Problema da Busca Aleatória e o Contexto de Forrageamento Ecológico

O problema da busca aleatória basicamente se resume em responder a seguinte pergunta: *Qual é a estratégia mais eficiente para encontrar objetos distribuídos aleatoriamente num dado ambiente onde suas posições a priori não são conhecidas?* Este problema tem sido extensivamente estudado desde meados do século XX até o presente momento e suas motivações se estendem em diversas linhas de pesquisa, dentro dos mais variados contextos científicos e tecnológicos. Por exemplo, no nível molecular, podemos citar o caso em que proteínas “buscam” por seus respectivos sítios (localização) por meio de uma difusão unidimensional ao longo de uma cadeia de DNA [1, 2]. No contexto social, podemos citar a dinâmica de pessoas buscando por objetos perdidos [3] ou até mesmo uma operação policial em busca de criminosos ou terroristas [4]. Do ponto de vista econômico, podemos citar a busca por novos poços de petróleo [5] e buscas por informação na internet [6, 7]. No entanto, apesar de existirem inúmeras aplicações em processos de busca, nesta tese iremos focar o problema no contexto ecológico, em particular na física do problema de *foraging* [4] (em português, a palavra usada é forrageamento). Neste caso, queremos entender e caracterizar a dinâmica do forrageador (em inglês, *forager*: “aquele que vai a algum lugar procurar por algo, especificamente por comida”, *Cambridge Dictionary*). Tal tipo de estudo tem despertado o interesse de físicos, pois abrange tópicos relevantes em algumas linhas de pesquisa em Física, como Teoria de Caminhada Aleatória [8], Processos Estocásticos, Difusão Anômala, Fenômenos Críticos, Sistemas Complexos, etc.

Em ecologia, a dinâmica de forrageamento é importante porque os animais, em geral, precisam se mover para encontrar comida, parceiros sexuais ou escapar de seus predadores.

Embora a estratégia de locomoção dependa de fatores naturais tais como o clima, temperatura, relevo e vegetação, a tentativa de otimizar o processo é estimulada pela necessidade de maximizar o encontro com outros organismos, levando a dinâmica de busca como fator principal que garante a sobrevivência do animal (pois facilmente, no caso ideal, encontra alimentos, parceiros para reprodução, abrigo, etc) e conseqüentemente a evolução da espécie.

Nesse sentido, um grande número de questões ainda não bem entendidas naturalmente surgem quando tentamos compreender os fatores que direcionam o processo de busca, uma vez que esses fatores dependem de específicas atividades dos organismos num dado período de tempo e habitat. Por outro lado, houve um considerável progresso científico [9, 10] quanto ao entendimento específico sobre padrões de movimento de organismos, ou seja, o porquê de determinadas trajetórias de busca serem adotadas.

É justamente nesse ponto onde esta tese se concentra, visando entender os efeitos das estratégias de buscas adotadas por organismos buscadores (“foragers”) em ambientes com baixa concentração de alvos (fontes de interesse, comida, etc), onde o balanço de energia metabólica do organismo buscador (necessária para manter a busca) é considerada durante o processo. Especificamente, consideramos que o balanço energético negativo conduz o sistema para um estado absorvente irreversível (“morte”), por meio de uma transição de fase. Vamos mostrar que para determinadas condições dos parâmetros energéticos, assim como na concentração de alvos disponíveis no ambiente de busca, os organismos buscadores evoluem para uma fase de sobrevivência ou para uma fase de extinção. Por outro lado, certas condições levam o sistema para uma situação crítica, justamente na transição entre as fases de sobrevivência e extinção. Esses resultados nos ajudam a entender como os processos de buscas aleatórias se comportam quando os recursos energéticos são levados em conta, possibilitando assim uma melhor interpretação e compreensão de estratégias de forrageio ecológico em ambientes naturais.

1.2 Contexto Histórico e Motivações do Modelo Usado

O termo *Caminhada Aleatória* (em inglês “*Random Walk*”), foi originalmente proposto pelo inglês Karl Pearson em 1905 [11, 12] através de uma carta enviada à revista científica *Nature*. Na ocasião, Pearson apresentou um modelo simples que descrevia a dinâmica de mosquitos numa floresta. O objetivo de Pearson era entender a distribuição de mosquitos após a execução de um grande número de voos de cada um. A carta foi respondida por Lord Rayleigh, através de um problema mais geral que o mesmo resolveu em 1880 e que

tratava de *Ondas de som em meios heterogêneos*. Curiosamente nesse mesmo ano em que Pearson propôs o termo Caminhada Aleatória, Albert Einstein publicou um artigo que se intitulava *Sobre o movimento de partículas suspensas em um fluido em repouso*, que descrevia uma análise matemática rigorosa da dinâmica de partículas imersas num fluido não muito viscoso, e que apresentavam movimentos irregulares e aleatórios. Como esse tipo de movimento foi primeiramente observado em 1827 pelo botânico escocês Robert Brown (através de partículas de pólen imersas num meio fluido), então essa dinâmica ficou conhecida como *Movimento Browniano* [13].

Logo após o artigo de Einstein ter sido publicado, Lotka [14](1910) e Volterra [15](1927), de forma independente, deram significativos avanços nos modelos determinísticos de dinâmica populacional, motivados principalmente pelo entendimento de equações que governam um modelo simples da dinâmica predador-presa.

No entanto, o problema de otimização por busca de alimentos (*foraging*), que pode ser caracterizado como um tipo de dinâmica de população, teve seus primeiros estudos (sob uma perspectiva não-determinística) apenas por volta de 1966, através dos trabalhos de MacArthur *et al* [16] e Emlen [17], e por volta de 1974 com Hassell e May [18]. Já em 1986 Marc Mangel e Collin Clark estabeleceram uma teoria de forrageamento ótimo (*Optimal Foraging Theory* - *OFT* [19]), que considera o processo de busca por regiões com alta concentração de recursos (*Patches*) em relação à média de recursos distribuídos num dado ambiente (mais detalhes em [20]). Tal processo de busca descrito pela *OFT* não será discutida nesta tese por se tratar de um modelo diferente em relação ao qual iremos propor.

A partir de então, o problema da busca aleatória tornou-se cada vez mais estudado, fazendo com que a década de 1990 seja considerada um dos principais períodos para o seu desenvolvimento. Nesse contexto, diversas variações dos modelos de buscas aleatórias surgiram, tais como:

1. Caminhadas Aleatórias Correlacionadas (*Correlated Random Walks* - *CRWs*), que se caracterizam pela existência de correlações entre os passos efetuados durante o processo de busca [21–23];
2. Caminhadas Intermitentes (*Intermittent Walks* - *IWs*), que se caracterizam pela mudança de comportamento na distribuição do tamanho dos passos realizados durante o processo de busca, considerando que distintas fases ou condições do ambiente podem emergir durante tal processo [3, 24–27];
3. Caminhadas Brownianas Compostas (*Composite Brownian Walks* - *CBWs*), que se assemelham às caminhadas intermitentes, diferenciando-se apenas pelo fato de terem escalas características para as distribuições de tamanhos de passos em quaisquer

condições no ambiente de busca e obedecendo ao Teorema Central do Limite - TLC (que será discutido no próximo capítulo) [28–30];

4. Caminhadas de Lévy (*Lévy Walks* - *LW*) e Voos de Lévy (*Lévy Flights* - *LFs*), que, ao contrário das caminhadas intermitentes, são descritas por uma distribuição de tamanho de passos dominada por um único parâmetro, conhecido como *índice de Lévy* μ ¹. [9, 10, 31–43].

Dentre as variações dos modelos de busca supracitados, as caminhadas e voos de Lévy têm se destacado por serem modelos que apresentam maior conformidade com dados empíricos extraídos de diversas espécies em situações reais de busca por alimentos [4]. Tais evidências empíricas são particularmente convincentes quando consideramos um dos mais extensos trabalhos sobre processo de predação e buscas [37], envolvendo o rastreamento de movimento de 55 indivíduos, pertencentes a 14 espécies distintas de predadores marinhos (tubarão-azul, tubarão-baleia, marlin azul etc), durante 5.700 dias ($\sim 15,5$ anos), mostrando que tais espécies utilizam as distribuições de Lévy sob condições escassas de alimentos. Além desse trabalho, um experimento mais recente [44] mostrou que certas espécies de albatrozes (*Diomedea Exulans* e *Thalassarche melanophris*), monitorados via tecnologia GPS (“Global Positioning System”) durante um certo período de análise, apresentam o comportamento de voos de Lévy durante o processo de busca por presas. Na referência [4] há uma extensiva listagem de dados empíricos mostrando diferentes animais que também executam forrageio através de caminhadas de Lévy.

Esses resultados experimentais (somados à flexibilidade e generalidade dos modelos), sugerem que a escolha pela estratégia de Lévy é condizente com um processo evolutivo de otimização e sobrevivência, uma vez que maximiza a taxa de encontros com alvos em momentos de escassez. Assim, a “hipótese de voos de Lévy em buscas por alimentos” (*Lévy Flight Foraging Hypothesis* [10]) apresenta significativa vantagem sobre os demais modelos de busca e por isso a adotaremos nesta tese.

1.3 Problema Abordado e Organização da Tese

Dentre as diferentes direções de análise e trabalhos realizados sobre processos de buscas aleatórias, um tópico muito importante mas pouco estudado é o balanço energético (energia ganha com a busca subtraída da energia gasta no processo). Quando o fator energia é considerado, é necessário que o organismo buscador adote estratégias eficientes, evitando ficar longos períodos sem encontrar por alvos, o que acarretaria na entrada em

¹Mais detalhes sobre as caminhadas e voos de Lévy, sobre as distribuições associadas e sobre o expoente μ , serão abordados na Fundamentação Teórica no próximo capítulo.

um estado físico irreversível, que nesse caso seria a “morte”. Dessa maneira, a inclusão energética na dinâmica do sistema de busca, permite estabelecer condições mínimas de eficiência, para as quais organismos buscadores seguem para um estado de sobrevivência limítrofe (perto da extinção).

Nesse contexto, emerge uma importante área de estudo da Mecânica Estatística - as Transições de Fase - com a qual é possível tentar entender os mecanismos que governam as transições entre os estados de sobrevivência e a extinção de uma espécie em busca por alimentos. Uma vez entendidos tais mecanismos, pode-se tentar comparar o problema da busca aleatória com outros sistemas físicos onde existem processos de transições de fase. Assim um melhor entendimento sobre processos de extinção ou evolução de certas espécies pode ser associado a um fenômeno comum na natureza, a criticalidade (em linhas gerais, processos críticos ocorrem quando partes de um dado sistema afastam-se do estado de equilíbrio, onde as ações de cada parte individual do sistema são dominadas pelas interações com as demais partes [82]).

Esta tese, portanto, está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 serão apresentados os principais fundamentos teóricos usados na formulação do problema de busca aleatória. Também revisaremos brevemente a física das transições de fase. Esses fundamentos serão importantes para os capítulos subsequentes, permitindo um melhor entendimento dos métodos que usaremos nesta tese, como por exemplo: o que é um voo ou uma caminhada de Lévy, como se comporta uma distribuição normal ou de Lévy, quais os tipos e características das transições de fase, o que vem a ser uma Classe de Universalidade, etc.

No capítulo 3 serão apresentados aspectos relacionados à dinâmica de busca em redes unidimensionais discretas e contínuas. Obviamente que tais modelos são uma grande simplificação do processo biológico concreto. Entretanto apresentam várias características que são similares ao caso real. Além disso, são relativamente simples, portanto possibilitando um estudo mais complexo de suas dinâmicas e transições de fase. Observamos que resultados iniciais deste capítulo foram publicados em 2007 [45] e basicamente apresentam a evolução energética do organismo buscador para diferentes estratégias adotadas na dinâmica de busca. O capítulo 4 trata da análise das transições de fase ao problema. Neste sentido, a escolha apropriada do parâmetro de ordem é fundamental. Assim, identificamos a Taxa de Sobrevivência como a quantidade correta para tal análise. Os expoentes críticos que caracterizam as transições de fase são determinados, permitindo a comparação com outros sistemas físicos, em particular com a Percolação Direcionada. Resultados desse estudo recentemente foram publicados [46] mostrando justamente os efeitos de tais transições. Além disso, nossos resultados numéricos motivaram o estudo analítico de transições de fase em modelos de buscas 1D, sob certas considerações simplificadoras e

num espaço de busca discreta [47], porém tais resultados não são apresentados na presente tese.

No capítulo 5, o efeito da variação dos parâmetros energéticos envolvidos no sistema (energia inicial, custo de locomoção e energia ganha a cada alvo encontrado) são analisados. O objetivo maior nesse capítulo é verificar como os processos de transições de fase são alterados (qualitativamente e quantitativamente) quando variamos os parâmetros de energia no modelo de buscas.

Por fim, no capítulo 6 apresentamos um estudo inicial do processo de busca aleatória num ambiente bidimensional, considerando também os fatores energéticos na busca. O caso 2D é muito mais complexo do ponto de vista computacional. Assim, uma fundamentação do modelo é apresentado e os primeiros resultados são obtidos. No capítulo 7 tecemos as considerações finais sobre a dinâmica do modelo, bem como apresentando algumas perspectivas de trabalhos e estudos futuros. Alguns tópicos relevantes para uma melhor compreensão dos resultados estão apresentados nos Apêndices.

Fundamentos Teóricos

Neste capítulo iremos tratar de alguns tópicos essenciais para o entendimento do modelo a ser proposto, bem como das análises a serem desenvolvidas. Basicamente o capítulo está dividido em duas áreas: aspectos estatísticos de caminhadas aleatórias e fenômenos críticos. Na primeira parte, veremos os principais conceitos à respeito das distribuições estatísticas que governam processos estocásticos, também veremos o Teorema Central do Limite, que contextualiza a origem de tais distribuições e, por fim, abordaremos algumas características de voos e caminhadas de Lévy. Na segunda parte, em fenômenos críticos, veremos alguns conceitos associados a sistemas complexos, transições de fase, teoria de leis de escala de tamanho finito e classes de universalidade. Tais conceitos serão fundamentais para as análises nos capítulos subsequentes.

2.1 Distribuição Normal

A Distribuição Normal, também conhecida como *Distribuição Gaussiana*, é uma das mais conhecidas e utilizadas na ciência moderna e contemporânea, uma vez que um grande número de medidas obtidas em diversos processos aleatórios, em vários cenários da natureza, conduzem seus resultados para uma distribuição normal [48, 49]. Nesse sentido, dentre os vários sistemas que estão relacionados com a distribuição normal, destaca-se o Movimento Browniano, que nada mais é do que um passeio ou uma simples caminhada aleatória como discutido no capítulo introdutório. Para uma melhor compreensão da relação entre movimento browniano e distribuição normal, consideremos uma caminhada aleatória simples como sendo constituída de um caminhante que, a partir de um tempo e posição inicial, se movimenta aleatoriamente para a direita com probabilidade p ou para a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$. Uma importante observação é que ao considerarmos que o sentido do passo atual independe do sentido do passo anterior ou dos

demais passos anteriores, ou seja, quando independe de toda a caminhada já realizada, então temos um caso especial da caminhada aleatória a qual é conhecida como *Caminhada Markoviana*. Caso contrário, se existir alguma dependência na configuração (direção e sentido) do passo atual com o(s) passo(s) anterior(es), então teremos uma *Caminhada não-Markoviana*. Considerando uma caminhada aleatória Markoviana, no limite em que o tempo entre passos tende a zero para tamanho de passos finitos e pequenos, temos justamente um movimento que se assemelha ao movimento de partículas suspensas num fluido viscoso observado por Robert Brown (a figura 2.1 ilustra uma caminhada aleatória markoviana para o caso bidimensional). Assim, supondo que essa partícula (ou um ca-

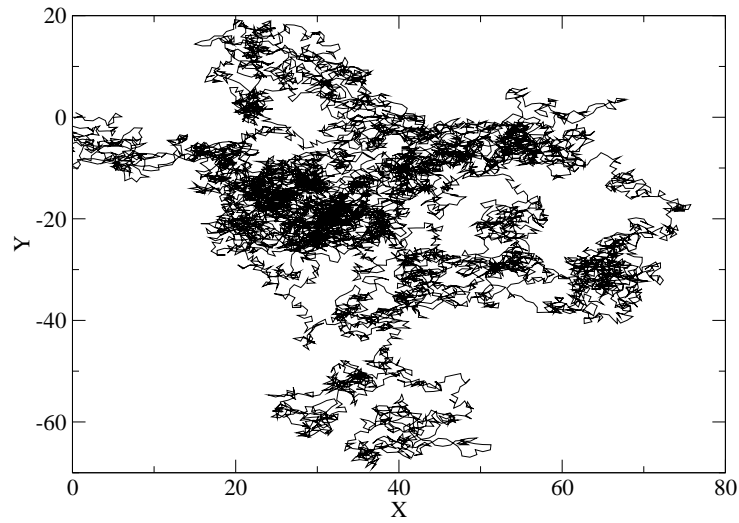


Figura 2.1: Um exemplo da caminhada aleatória browniana, markoviana e bidimensional, contendo um conjunto de $N = 10.000$ passos unitários realizados. Os eixos no sistema de coordenadas representam as respectivas posições em x e y

minhante aleatório) efetua N passos independentes de comprimento ℓ ao longo de uma rede 1D, ao final de N passos realizados, a partícula estará na posição $S_x = k\ell$, onde k é um número inteiro no intervalo $[-N, N]$. Sendo r o número de passos realizados para a direita, l o número de passos realizados para a esquerda, p a probabilidade de um passo ser para a direita e $q = 1 - p$ a probabilidade de um passo ser para a esquerda, então a probabilidade $P_N(r)$ de obtermos r passos para a direita e $l = N - r$ passos para esquerda, para qualquer combinação de passos, é dada por:

$$P_N(r) = \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r q^{N-r}. \quad (2.1)$$

Essa função de probabilidade é geralmente conhecida como *Distribuição Binomial*. Se analisarmos esse tipo de caminhada para um número de passos N muito grande, então é fácil verificar que a função de probabilidade binomial tenderá a um valor máximo para algum valor $r = \tilde{r}$. Se o número de passos é muito grande, então na região muito próxima do máximo da função de probabilidade P , temos $|P(r+1) - P(r)| \ll P(r)$. Dessa forma,

no limite em que N é grande, podemos considerar a função $P_N(r)$ como sendo contínua na variável r . Portanto, para localizar o máximo de P basta calcular $\left. \frac{dP}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} = 0$ ou equivalentemente $\left. \frac{d \ln P}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} = 0$. Para investigar o comportamento de $P(r)$ próximo de seu valor máximo, é conveniente definir $r \equiv \tilde{r} + \eta$ e assim expandir a função $\ln P(r)$ em torno de \tilde{r} , visto que a função $\ln P$ varia muito mais lentamente do que a função P . Dessa forma, a expansão em série da função $\ln P$ permite uma convergência mais rápida do que para a expansão da função de P . Logo:

$$\ln P(r) = \ln P(\tilde{r}) + \left. \frac{d \ln P}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} \eta + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \ln P}{dr^2} \right|_{r=\tilde{r}} \eta^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 \ln P}{dr^3} \right|_{r=\tilde{r}} \eta^3 + \dots \quad (2.2)$$

Quando η é suficientemente pequeno, os termos de ordem superior podem ser desprezados e sabendo que $\left. \frac{d \ln P}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} = 0$, então para a primeira aproximação da expansão em série, temos

$$P(r) = \tilde{P} e^{\frac{1}{2} B_2 \eta^2}, \quad (2.3)$$

onde $B_2 \equiv \left. \frac{d^2 \ln P}{dr^2} \right|_{r=\tilde{r}}$. Para encontrarmos o valor de B_2 , basta analisar a expansão da equação 2.1. Para isso, temos:

$$\ln P(r) = \ln N! - \ln r! - \ln(N-r)! + r \ln p + (N-r) \ln q, \quad (2.4)$$

lembrando que para um certo número y , inteiro, tal que $y \gg 1$, $\ln y!$ pode ser considerada como uma função quase contínua tal que:

$$\frac{d \ln y!}{d y} \approx \frac{\ln(y+1)! - \ln y!}{1} = \ln \frac{(y+1)!}{y!} = \ln(y+1). \quad (2.5)$$

Portanto, no caso em que $y \gg 1$, temos $\frac{d \ln y!}{d y} \approx \ln y$. Derivando a equação 2.4, obtemos:

$$\frac{d \ln P}{dr} = -\ln r + \ln(N-r) + \ln p - \ln q. \quad (2.6)$$

Sabendo que $\left. \frac{d \ln P}{dr} \right|_{r=\tilde{r}} = 0$, logo $\ln \left[\frac{(N-\tilde{r})p}{\tilde{r}q} \right] = 0$ e assim $\tilde{r} = Np$. Derivando a equação 2.6 para $r = \tilde{r}$, considerando que $\tilde{r} = Np$ e que $p + q = 1$, concluímos que

$$B_2 = -\frac{1}{Npq}. \quad (2.7)$$

Uma vez determinado B_2 , precisamos agora obter o valor de \tilde{P} . Para isso, basta utilizarmos a condição de normalização $\sum_{r=0}^N P(r) = 1$. Considerando P e r como quantidades

aproximadamente contínuas,

$$\sum_{r=0}^N P(r) = 1 \approx \int P(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tilde{r} + \eta) d\eta = 1. \quad (2.8)$$

Notemos que o integrando sobre η é uma aproximação razoável visto que para valores de η cada vez maiores, a integral gera valores desprezíveis diante de η pequeno. Assim, substituindo a equação 2.3 nesta última, temos:

$$\tilde{P} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2Npq}\eta^2} d\eta = \tilde{P} \sqrt{2\pi Npq} = 1. \quad (2.9)$$

Uma vez que $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-(n+1)/2}$ (teorema de cauchy [50]), finalmente obtemos a distribuição normal 2.10 que, neste caso, é a probabilidade de tomar r passos para a direita depois de N passos realizados.

$$P(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{(r-Np)^2}{2Npq}}. \quad (2.10)$$

Por meio desse simples exemplo, notamos a conexão entre a caminhada aleatória browniana com a distribuição normal, a qual apresenta algumas propriedades bastante particulares, tais como: presença de simetria, curva em forma de sino, variação de $-\infty$ a $+\infty$, caracterizada por uma média μ e por um desvio padrão σ (na Eq. 2.10, $\mu = Np$ e $\sigma^2 = Npq$). Um exemplo de tal distribuição pode ser observado na figura 2.2.

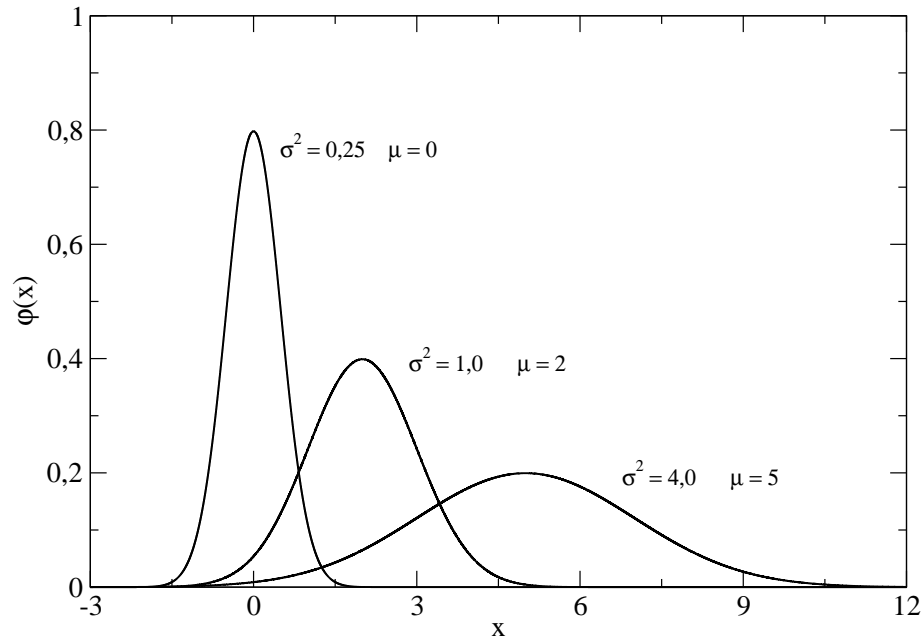


Figura 2.2: Exemplo de uma distribuição normal para diferentes valores de média μ e variância σ^2 .

Ainda sobre as distribuições gaussianas, vale salientar três observações importantes:

1. É uma distribuição teórica, ou seja, dados experimentais não teriam todas as propriedades acima descritas, apenas confirmariam a descrição de normalidade. Um exemplo desse ponto está no fato de que dados experimentais são finitos, fazendo com que a distribuição não pertença ao intervalo $[-\infty, \infty]$ [49].
2. Toda distribuição normal é numericamente *única*. Assim, por exemplo, a distribuição normal da altura dos homens de uma determinada região é diferente da distribuição normal da massa corpórea de mulheres da mesma região. Porém, embora os valores das médias e desvios padrões sejam diferentes, tais distribuições ainda conservam sua forma sinuosa (de sino) e simétrica [49].
3. A distribuição normal geralmente pode ser usada como uma aproximação de outros tipos de distribuições, tais como a de Poisson e a Binomial [48].

2.2 Teorema Central do Limite

Uma parcela considerável da abrangência do uso da distribuição normal se deve ao trabalho do matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827) [51] que, no início do século XIX, revelou uma intrigante propriedade das variáveis aleatórias que as conectavam à distribuição normal de uma forma bastante inusitada. Segundo Laplace,

“A soma de n variáveis aleatórias $X_1 + X_2 + \dots + X_n$, tendo, cada uma, a mesma distribuição de probabilidade, com média μ e desvio padrão finito σ , se aproxima de uma distribuição normal com média $n \times \mu$ e desvio padrão $\sigma \times \sqrt{n}$, à medida que n aumenta”

Esta observação estatística chamou a atenção de muitos físicos e matemáticos da época, uma vez que essa propriedade fornecia respostas para diversos problemas envolvendo variáveis ou eventos aleatórios. Tal propriedade ficou conhecida como *Teorema Central do Limite (TCL)* (termo adotado por Pólya [52] em 1920). Após Laplace, o matemático e físico Aleksandr Lyapounov[1857-1918], no ano de 1901, apresentou a primeira prova rigorosa desse teorema [53], embora ainda sob algumas condições particulares. Posteriormente, na década de 1920, Jarl Lindeberg[1876-1932] e Paul Lévy[1886-1971] fizeram significativas contribuições para o entendimento do TCL, período que publicaram diversos artigos à respeito [54–58]. Mas foi somente em 1935 que Feller [59] e Lévy [60], de forma independente, estruturaram rigorosamente a demonstração do teorema, finalizando um

período de aproximadamente dois séculos onde o grande problema teórico das probabilidades esteve centrado no estudo desse teorema (e por isso ele foi denotado como teorema “central” do limite). Uma das formas do Teorema diz que:

Teorema 1 (TCL). *Se $\{X_n\}$ é um conjunto de N variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tendo cada variável um valor esperado μ e uma variância positiva finita σ^2 , então:*

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (2.11)$$

ou seja, uma soma centrada e normalizada de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, converge para uma distribuição normal quando $n \rightarrow \infty$ ¹.

Em linhas gerais, o teorema diz que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes N se aproxima de uma distribuição normal à medida que $N \rightarrow \infty$. Com isso, o teorema não somente fornece um método simples para o cálculo de probabilidades aproximadas de somas de variáveis aleatórias e independentes, como também ajuda a explicar o fato de que frequências empíricas de muitas populações em sistemas naturais, exibem curvas que seguem uma distribuição normal. Existem na literatura várias apresentações da demonstração do TLC [61–68]. Aqui a demonstração do teorema se guiará a partir da função característica associada a uma variável aleatória X e de sua função densidade de probabilidade P_X .

Demonstração: Considere uma variável aleatória $-\infty < X < \infty$. A probabilidade de obter X num pequeno intervalo $(x, x + dx)$ é denotada como $P_X(x)dx$, onde $P(x)$ é chamada de função densidade de probabilidade (*probability density function* - PDF). Para que $P_X(x)$ possa ser utilizada como uma medida probabilística, é necessário que $P_X(x) \geq 0$ e que sua condição de normalização seja válida, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)dx = 1 \quad (2.12)$$

onde o n -ésimo momento da variável aleatória X é definido por:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n P_X(x)dx, \quad (2.13)$$

e sua variância:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (2.14)$$

¹ $N(0, 1)$ indica uma distribuição normal com média 0 e variância 1. O símbolo \xrightarrow{d} significa convergência para uma dada distribuição.

Uma vez que tais condições são estabelecidas, podemos calcular sua respectiva função característica $\tilde{P}_X(k)$, também conhecida como transformada de Fourier de $P_X(x)$. Assim:

$$\tilde{P}_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} P_X(x) dx, \quad (2.15)$$

e sua correspondente transformada inversa é:

$$\mathfrak{S}_k^{-1}[P_X(k)](x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k X} P(X) dX. \quad (2.16)$$

É a partir da equação 2.16 que se inicia a demonstração². Ora, sabendo que a expansão em série de Taylor da função $f(x) = e^x$ é da forma:

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.17)$$

então,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_k^{-1}[P_X(k)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i k X)^n}{n!} P(X) dX \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i k)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} X^n P(X) dX, \end{aligned}$$

que, de acordo com a equação 2.13, resulta em:

$$\mathfrak{S}_k^{-1}[P_X(k)](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i k)^n}{n!} \langle X^n \rangle. \quad (2.18)$$

Como

$$\langle X^n \rangle = \langle N^{-n}(x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n \rangle \quad (2.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} N^{-n}(x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n P(x_1)P(x_2)\dots P(x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N, \quad (2.20)$$

logo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_k^{-1}[P_X(k)](x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i k)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} N^{-n}(x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n P(x_1)\dots P(x_N) dx_1 \dots dx_N \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2\pi i k (x_1 + \dots + x_N)}{N} \right]^n \frac{1}{n!} P(x_1)\dots P(x_N) dx_1 \dots dx_N \end{aligned}$$

²Maiores detalhes quanto ao rigor matemático, pode ser encontrado em *Foundations of Modern Probability*, Kallenberg, O. [61]

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_k^{-1}[P_X(k)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k(x_1 + \dots + x_N)/N} P(x_1) \dots P(x_N) dx_1 \dots dx_N \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x_1/N} P(x_1) dx_1 \times \dots \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x_N/N} P(x_N) dx_N.
\end{aligned}$$

As variáveis aleatórias são identicamente distribuídas, assim:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_k^{-1}[P_X(k)](x) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x/N} P(x) dx \right]^N \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{2\pi i k}{N} \right) x + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi i k}{N} \right)^2 x^2 + \dots \right] P(x) dx \right\}^N \\
&= \left[1 + \frac{2\pi i k}{N} \langle x \rangle - \frac{(2\pi k)^2}{2N^2} \langle x^2 \rangle + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \right]^N \\
&= \exp \left\{ N \ln \left[1 + \frac{2\pi i k}{N} \langle x \rangle - \frac{(2\pi k)^2}{2N^2} \langle x^2 \rangle + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Para N suficientemente grande, temos uma expressão do tipo $\ln(1+x)$ que pode ser expandida em séries de Taylor ³ em torno de $x = 0$. Dessa maneira, temos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_k^{-1}[P_X(k)](x) &\approx \exp \left\{ N \left[\frac{2\pi i k}{N} \langle x \rangle - \frac{(2\pi k)^2}{2N^2} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{(2\pi i k)^2}{N^2} \langle x \rangle^2 + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \right] \right\} \\
&= \exp \left[2\pi i k \langle x \rangle - \frac{(2\pi k)^2 (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right] \\
&\approx \exp \left[2\pi i k \mu_x - \frac{(2\pi k)^2 \sigma_x^2}{2N} \right],
\end{aligned}$$

onde $\mu_x \equiv \langle x \rangle$ (média e primeiro momento da distribuição) e $\sigma_x^2 \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ (variância e segundo momento da distribuição). Uma vez que a propriedade injetiva das transformadas de Fourier garante que

$$P_X(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \mathfrak{S}^{-1}[P_X(k)] dx,$$

então:

$$P_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[2\pi i k (\mu_x - x) - \frac{(2\pi k)^2 \sigma_x^2}{2N} \right] dx. \quad (2.21)$$

Definindo $a \equiv 2\pi(\mu_x - x)$ e $b \equiv (2\pi\sigma_x)^2/2N$, a integral da equação 2.21 torna-se:

$$P_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iak - bk^2} dk, \quad (2.22)$$

³ $\ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

que representa a transformada de Fourier de uma função gaussiana. Aplicando o *Teorema de Cauchy* [50] para solucionar a integral da Eq. 2.22, chegamos no resultado tal que:

$$P_X(x) = \frac{\sqrt{N}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{(\mu_x - x)^2 N / 2\sigma_x^2}. \quad (2.23)$$

Como a variância da soma das variáveis aleatórias não-correlacionadas é igual a soma de suas variâncias, conforme mostra a fórmula de Bienaymé [62], ou seja, que $\sigma_X = \sigma_x / \sqrt{N}$ e $\mu_X = \mu_x$, então concluímos que:

$$P_X = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-(\mu_X - x)^2 / 2\sigma_X^2}. \quad (2.24)$$

A equação 2.24 retrata justamente uma distribuição normal, como queríamos demonstrar. Esse teorema é de central importância não apenas em teoria de probabilidades e mecânica estatística, como também em diversos outros contextos, visto que mesmo as *PDF's* que possuem variáveis aleatórias x_i 's que não necessariamente seguem uma gaussiana, ainda assim a soma de tais variáveis seguirá para a distribuição normal. Por esse motivo, a gaussiana é dita como um *atrator estatístico* de tais *PDF's*, no limite em que $N \rightarrow \infty$ e cujos momentos são finitos. Há uma vasta literatura sobre o teorema central do limite, no sentido de que existem demonstrações e formulações mais refinadas [58, 61, 62] à respeito de detalhes sobre esse teorema, como por exemplo, *quão rápida é a convergência de P_X para a gaussiana*. Ou, *quando podemos afirmar que tal convergência foi alcançada, ou seja, em que momento N é grande o suficiente para o teorema ser válido*. Em particular, podemos nos perguntar se o teorema se sustenta no limite em que os primeiros momentos divergem para uma certa função densidade de probabilidade. A resposta dessa pergunta está conectada à generalização do teorema central do limite, como veremos a seguir.

2.2.1 A Generalização do Teorema e as Distribuições α -Estáveis de Lévy

A generalização do teorema central do limite surge da necessidade de obter o atrator estatístico de distribuições que possuem os primeiros momentos divergentes. Como vimos, o TCL “tradicional” se limita à condição de que a variância das variáveis aleatórias seja finita. Para a situação onde o conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas possuem variância infinita, é necessário utilizar modelos de distribuições estáveis, permitindo assim que o teorema central do limite seja generalizado. Essa classe de distribuições foi caracterizada por Paul Lévy em 1925 [69] e tem como fundamento os conceitos de estabilidade das distribuições e suas variáveis. A partir dessa

caracterização, a generalização do teorema central do limite (*GTCL*) pode ser demonstrado. Em suma:

Teorema 2 (*GTCL*). *Seja X_1, X_2, \dots sendo uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Existe uma constante a_n tal que, quando $n \rightarrow \infty$, a soma*

$$a_n(X_1 + X_2 + \dots) \xrightarrow{d} Z$$

se, e somente se, Z é uma variável aleatória estável com algum $0 < \alpha \leq 2$.

No teorema, Z pode ser interpretada como uma família de distribuições estáveis caracterizadas pelo parâmetro α . Por esse motivo, essas distribuições comumente são chamadas de *Distribuições α -estáveis de Lévy*. Um detalhe é que para $\alpha = 2$, tal distribuição segue uma gaussiana, fazendo com que o tradicional teorema central do limite seja incorporado pelo teorema central do limite generalizado. Enfim, para entender melhor essa generalização, se faz necessário compreender alguns conceitos sobre estabilidade.

Definição 1. *Uma variável aleatória X segue uma distribuição estável se, para quaisquer números positivos A e B , há um número positivo C e um número real D tal que:*

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D, \quad (2.25)$$

onde X_1 e X_2 são cópias independentes de X e “ $\stackrel{d}{=}$ ” denota a igualdade em distribuições.

Teorema 3. *Para qualquer variável aleatória X , há um número $\alpha \in (0, 2]$, tal que o número C (conforme definição acima) satisfaz:*

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha, \quad (2.26)$$

onde α é chamado de índice de estabilidade ou expoente característico e a variável X (com índice α) é chamada de variável α -estável⁴.

Notemos, por exemplo, que se X é uma variável aleatória gaussiana com média μ e variância σ^2 , ou seja, $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$, então X é estável com $\alpha = 2$, pois

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A + B)\mu, (A^2 + B^2)\sigma^2), \quad (2.27)$$

onde, da definição 1, $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$ e $D = (A + B - C)\mu$.

Uma outra definição importante para a generalização do *TCL* (equivalente à definição 1) é a seguinte:

⁴A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [66]

Definição 2. *Uma variável aleatória X segue uma distribuição estável se para qualquer $n \geq 2$, há um número positivo C_n e um número real D_n tais que:*

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n, \quad (2.28)$$

onde X_1, X_2, \dots, X_n são cópias idênticas de X .

Ou seja, se X é estável de acordo com a definição 1, então, por indução, também é estável conforme a definição 2. Partindo desse pressuposto, é possível concluir que⁵

$$C_n = n^{1/\alpha}, \quad (2.29)$$

para algum $0 < \alpha \leq 2$.

Assim, de uma forma geral, esses são os mecanismos de caracterizar todas as distribuições estáveis. No entanto, com relação às variáveis aleatórias estáveis, uma forma bastante prática de fazer a sua caracterização, é através de sua função característica, definida como:

$$\phi(w) = E[e^{jwX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f(x) dX, \quad (2.30)$$

onde $f(x)$ é a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias e E denota o valor esperado da e^{jwX} . Entretanto, se estamos interessados em distribuições simétricas α -estáveis, denotadas por $S\alpha S$, a função característica relacionada é da forma:

Definição 3 (*Funções Características de Distribuições $S\alpha S$*). *Uma variável aleatória X é simetricamente estável se, e somente se, $X \stackrel{d}{=} AZ + B$, onde $0 < \alpha \leq 2$, $A \geq 0$, $B \in \mathbb{R}$ e $Z = Z(\alpha)$ é uma variável aleatória com função característica*

$$\phi(w) = e^{-\gamma^\alpha |w|^\alpha}, \quad (2.31)$$

onde $\gamma > 0$ é o parâmetro de dispersão relacionada à escala da distribuição. Podemos notar que α continua relacionado com o índice de estabilidade da distribuição e restrito à condição de estar no intervalo $(0, 2]$. Na prática, α está relacionado com a curtose⁶ da distribuição. Esta estabilidade na simetria das distribuições mantém muitas das características da distribuição gaussiana, como por exemplo: a suavidade da curva, presença de um único pico, aspecto de sino, simetria com relação ao pico da distribuição etc. A figura 2.3 retrata tal semelhança.

Definição 4 (*Função Característica de uma Variável Aleatória Estável*). *Uma variável aleatória X é estável (simétrica ou assimétrica) com expoente característico α , dispersão*

⁵As constantes de normalização são da forma $C_n = n^{1/\alpha}$ com $0 < \alpha \leq 2$, onde α é denotado como expoente característico, Feller 1971, Teorema VI.1.1 [66].

⁶Grau de achatamento, ou seja, como se comporta a “cauda” da curva função densidade de distribuição.

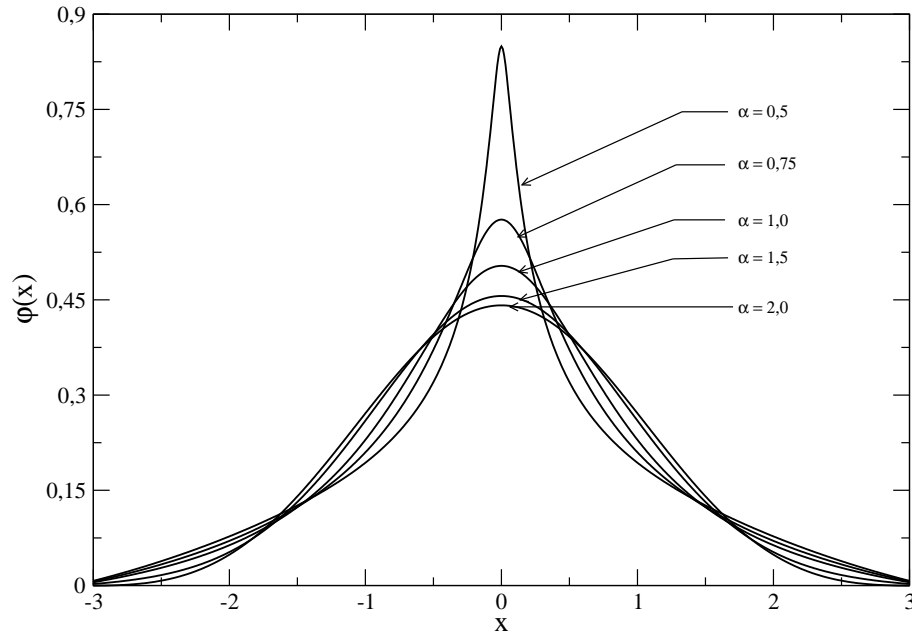


Figura 2.3: Função densidade das distribuições estáveis e simétricas $S_{\alpha}S$ para diferentes valores de α .

γ , localização β e uma medida de assimetria δ , se X tem uma função característica da forma:

$$\phi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \exp(-\gamma^{\alpha}|w|^{\alpha} [1 - j\delta(\tan\frac{\pi\alpha}{2})(\text{sgn } w)] + j\beta w) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma|w| [1 + j\delta\frac{2}{\pi}(\text{sgn } w)\ln|w|] + j\beta w) & \alpha = 1 \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

onde a função sinal é definida como:

$$\text{sgn } w = \begin{cases} -1, & u < 0 \\ 0, & u = 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Dessa maneira encontramos diversas possibilidades de distribuições. Para garantirmos que tais distribuições sejam estáveis, é necessário que $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma > 0$, $-1 \leq \delta \leq 1$ e β podendo ser qualquer número real. O parâmetro δ está relacionado com o grau de assimetria em torno da média, de forma que qualquer distribuição simétrica tem $\delta = 0$. O parâmetro γ está relacionado com o parâmetro de escala (ou parâmetro de dispersão), ou seja, mostra o comportamento da largura da distribuição. Finalmente, o parâmetro β nos fornece a média de centralidade da distribuição.

Poucas são as opções em que encontramos uma expressão analítica fechada para a função densidade de probabilidade, mas são justamente essas que resultam nas dis-

tribuições mais importantes e utilizadas no meio científico. Por exemplo, as *Distribuições Gaussianas* (como já mencionadas), têm $\gamma = \sigma^2$ e $\beta = \mu$ como parâmetros variáveis e $\alpha = 2$ e $\delta = 0$ como parâmetros fixos. Já as *Distribuições de Cauchy*, apresentam γ e β como parâmetros variáveis, $\alpha = 1$ e $\delta = 0$ como parâmetros fixos. Por fim as *Distribuições de Lévy*, cuja função densidade de probabilidade se configura como:

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \beta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x - \beta)}\right), \quad \beta < x < \infty \quad (2.34)$$

e que tem como parâmetros fixos $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\delta = 1$, sendo portanto uma distribuição assimétrica, conforme figura exemplo 2.4.

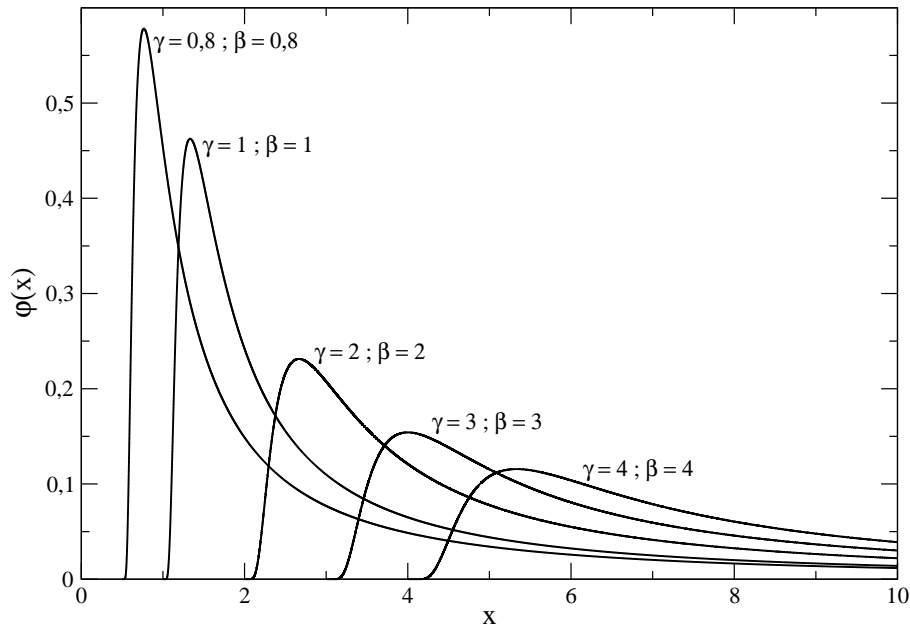


Figura 2.4: Distribuição de Lévy para distintos valores da dispersão γ e da localização β .

Fica claro, portanto, que as distribuições α -estáveis de Lévy compõem o grande atrator estatístico das *PDF's* com momentos finitos ou infinitos. A partir desses conceitos, a demonstração formal da generalização do teorema, se baseia na função característica de tais distribuições estáveis e segue de forma semelhante ao caso não-generalizado do teorema⁷.

2.3 Voos e Caminhadas de Lévy

Conforme descrito no capítulo introdutório, existe uma grande motivação para o estudo de caminhadas de Lévy devido a sua presença em diversos contextos na natureza.

⁷O rigor matemático, assim como as diversas definições, proposições e teoremas vinculados à demonstração, podem ser encontrados na literatura relacionada ao tema [61–63, 65–69].

Tais caminhadas, por sua vez, exibem distribuições com probabilidades estatísticas relacionadas ao teorema central do limite generalizado, onde as distribuições α -estáveis de Lévy formam esse grande atrator estatístico. Nesse contexto, podemos presumir que o comprimento dos passos (variáveis) gerado de forma aleatória durante uma caminhada, segue uma distribuição do tipo lei de potência na forma:

$$P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \quad (2.35)$$

onde tais variáveis convergem para distribuições estáveis de Lévy, com índice de estabilidade $\alpha = \mu - 1$. O argumento que defende o uso dessa distribuição, se baseia no fato de que distribuições hiperbólicas ou inversas de lei de potência (equação 2.36), garantem a divergência na dispersão da distribuição, tornando-a uma distribuição não-gaussiana e, portanto, fazendo uso do teorema central do limite generalizado e das distribuições estáveis de Lévy.

$$p(x) = \frac{c}{|x|^{\alpha+1}}, \quad 0 < \alpha < 2, \quad (2.36)$$

(onde c é uma constante de normalização). Sua função característica, ou seja, a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade, corresponde a uma distribuição fractal [70, 71] e pode ser determinada ao utilizar o teorema Tauberiano [72]:

$$\tilde{p} \cong 1 - c|k|^\alpha \cong e^{-c|k|^\alpha}, \quad (2.37)$$

para pequenos valores de k . Com alguns passos algébricos, a função densidade de probabilidade da equação 2.36 é:

$$P_L(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-\gamma t|k|^\alpha} dk, \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad (2.38)$$

que é a expressão para a distribuição de Lévy simetricamente estável em 1D. No limite assintótico, a equação 2.38 se aproxima de uma distribuição em forma de potência inversa, também conhecida como distribuição de Pareto [73].

$$P_L(y, t) \approx \frac{1}{|y|^{\alpha+1}}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.39)$$

que tem a mesma forma da equação 2.36. Assim podemos gerar caminhadas de Lévy através de 2.35, onde o índice de Lévy no intervalo $1 < \mu < 3$ leva a distribuições estáveis de Lévy, e para $\mu \geq 3$ converge para uma distribuição normal. O caso em que $\mu \leq 1$ não corresponde a uma distribuição normalizada.

Na prática, para sortear o comprimento dos passos, basta utilizar a equação 2.40,

obtida a partir do *método de inversão*⁸ aplicado à equação 2.35.

$$\ell = \ell_0 x^{1/(1-\mu)}, \quad (2.40)$$

onde x é uma variável aleatória distribuída uniformemente no intervalo $(0, 1)$, ℓ_0 é o comprimento de passo mínimo e μ é o expoente da lei de potência (índice de Lévy). Portanto, variar μ nos permite obter diferentes tipos de caminhada, indo desde a difusão normal (retratada pelo movimento browniano $\mu \geq 3$) até à dinâmica superdifusiva (retratada por um movimento balístico $\mu \rightarrow 1^+$).

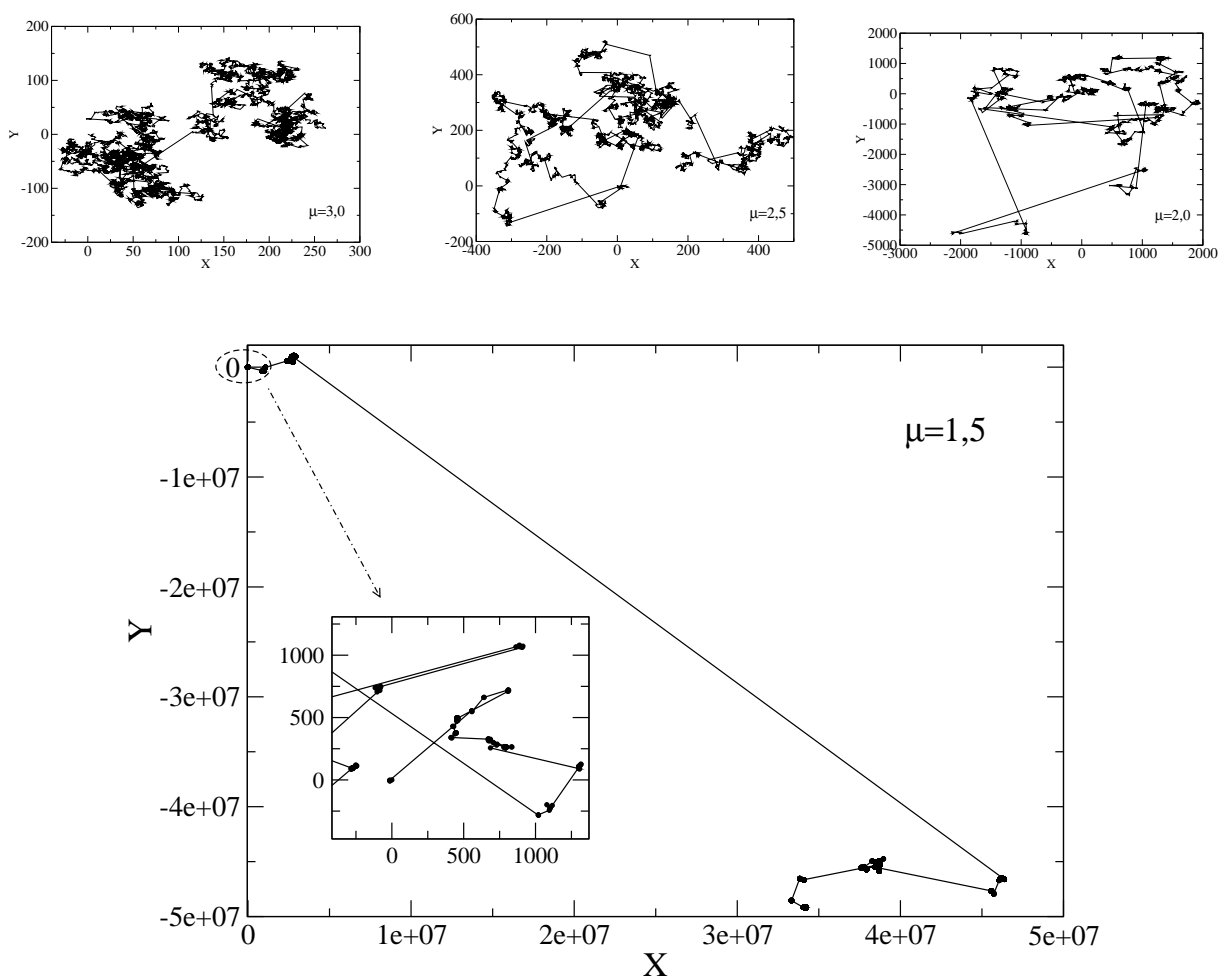


Figura 2.5: Diferentes caminhadas de Lévy, variando conforme μ . Quando $\mu \rightarrow 1^+$, a caminhada torna-se mais superdifusiva, tendendo a um movimento balístico. Por Outro lado, para $\mu \geq 3$ a caminhada tende a um movimento Browniano.

A aplicabilidade da dinâmica de movimento de Lévy, basicamente envolve dois modelos: *Caminhadas de Lévy* (*Lévy Walks*) e *Voos de Lévy* (*Lévy Flights*). A principal diferença entre ambas está relacionada com a velocidade do movimento. Nos voos de

⁸Método baseado nas transformações fundamentais das leis de probabilidade. Por ser uma importante equação para a dinâmica de buscas aleatórias, a demonstração do método encontra-se no Apêndice A.

Lévy, a caminhada é instantânea, ou seja, independente do comprimento do passo a ser realizado, o caminhante “pula” entre a posição inicial e final instantaneamente. Enquanto que nas caminhadas de Lévy, o trajeto entre a posição inicial e final, a partir de um dado comprimento de passo, se faz de maneira “caminhada”, ou seja, com uma velocidade que assumimos constante e linear no tempo. A depender do problema que se deseja estudar e dos processos estocásticos envolvidos, usa-se um ou outro modelo. A figura 2.5 ilustra alguns exemplos de caminhadas de Lévy para uma melhor compreensão. Analisando tais figuras, torna-se fácil perceber que a caminhada fica mais difusiva à medida que $\mu \rightarrow 1^+$. Uma segunda e importante observação está relacionada com uma das principais características das caminhadas de Lévy: muitos e pequenos passos intercalando com poucos e grandes passos, como podemos ver ainda na figura 2.5, para o caso $\mu = 2, 0$, por exemplo. Esse comportamento é um retrato das caminhadas de Lévy, sendo uma consequência direta da divergência da variância nessa distribuição.

2.4 Caracterização dos Alvos e Dimensionalidade

Uma das riquezas que envolve o problema da busca aleatória está relacionada justamente com a falta de conhecimento da localização dos alvos distribuídos aleatoriamente [74] num determinado ambiente de busca. Essa falta de informação não necessariamente leva a uma maior complexidade. Podemos supor, por exemplo, que a localização de todos os alvos é conhecida, então poderíamos nos perguntar qual seria a ordem de visita aos alvos que reduziria o custo energético durante a locomoção nesse processo (exemplo conhecido como “Problema do vendedor viajante” [75]). Este exemplo, portanto, pode ser tão complexo quanto o caso onde não se conhece a localização dos alvos, que é uma característica essencial no contexto da busca aleatória.

De uma forma geral, o problema de forrageamento pode ser analisado nos casos onde os alvos são fixos ou dinâmicos. Independente do caso escolhido, a busca pode ser caracterizada como *destrutiva* (no encontro, o alvo é eliminado) ou *não-destrutiva* (após um certo tempo τ , o alvo reaparece na localização onde foi encontrado). Ambas as situações têm motivação para estudo. Podemos imaginar alvos fixos como um sistema onde animais herbívoros procuram por específicas plantas para sua alimentação. Por outro lado, podemos pensar na situação onde animais carnívoros procuram por outros animais, num sistema predador-presa, onde os alvos são móveis. Nesse contexto, muitos estudos foram realizados no fim do século XX e começo do século XXI à respeito de processos de buscas para alvos fixos, situação que torna mais simples a análise numérica e analítica do problema [10, 33, 34, 76, 77]. No entanto, alguns poucos estudos foram realizados para o caso de alvos dinâmicos [45], devido à natureza complexa do estudo, tanto no aspecto com-

putacional quanto no analítico. Tal complexidade pode ser percebida, por exemplo, por meio de uma simulação computacional, onde não somente o buscador está em movimento (fazendo a busca), como também todos os demais alvos, assim formando um conjunto de caminhantes que passeiam de forma aleatória, simultânea e independente uns dos outros⁹.

Uma vez que temos o espaço de busca contendo buscador e alvo, logo surgem algumas questões importantes. Por exemplo: como o buscador se movimenta e qual o padrão de difusão gerado por essa locomoção? Como a taxa de encontros buscador-alvo depende dos parâmetros da busca? Essas perguntas podem ser respondidas a partir do conhecimento de um dos principais parâmetros relacionados à busca aleatória: a *densidade de alvos*. É fato que uma densidade alta proporciona um grande número de encontros. Nessa situação, a escolha por uma estratégia que otimize a taxa de encontros é irrelevante. Por outro lado, em baixas densidades, raros são os momentos em que há encontros entre buscador e alvo, o que implica dizer que a estratégia de busca adotada é extremamente relevante e se justifica no fato de que em processos de buscas reais, o ato de caminhar exige um custo energético. Portanto, se o buscador não adota uma estratégia de busca eficiente, o mesmo (ou toda a sua espécie) pode ser levado à extinção. Assim, a densidade de alvos na rede sugere ser um bom parâmetro de controle para a análise da otimização da estratégia de busca.

Embora as aplicações do estudo de busca aleatória sejam diversas, como já comentado, a ferramenta física e matemática por trás deste estudo é similar em qualquer que seja a aplicação, ou seja, localizar alvos (objetos de busca) quando as suas posições a priori não são conhecidas. A complexidade inerente deste problema, assim como a abundância de ideias e métodos que tornam possíveis a concretização desse objetivo, permite o crescimento da interdisciplinaridade deste problema em muitas das áreas da Física. Em particular, os conceitos e métodos da mecânica estatística são úteis no estudo de buscas aleatórias [74]. O motivo de tal particularidade se justifica na especificidade dessa mecânica: tratar de sistemas que envolvem muitas entidades constituintes a partir do comportamento delas, que podem ser átomos, moléculas, íons ou, em nosso caso específico, um sistema composto de buscadores e alvos. Neste tratamento é possível obter informações das propriedades macroscópicas do sistema através das variáveis de interesse prático.

Neste contexto, a dimensionalidade do sistema de interesse passa a ser um quesito importante nessa análise. Em baixas dimensões (1D e 2D) os efeitos das flutuações são notáveis e a interação entre as partículas se faz presente na análise do problema. Já para altas dimensões ($d \geq 3$) os efeitos de campo médio passam a ser predominantes. A importância dos efeitos de flutuações (devido a necessidade de considerar as características

⁹É justamente esse caso que será estudado nesta tese, tanto no caso unidimensional como no bidimensional.

de cada caminhante, posição e velocidade, por exemplo) e a simplicidade de trabalhar em dimensões menores (pois diminui consideravelmente o tempo de simulação computacional [78]), permite que a dinâmica seja geralmente tratada em ambientes uni ou bidimensionais.

Em princípio, buscas aleatórias em ambientes 1D podem parecer não observáveis na natureza. No entanto, é possível que alguns processos de buscas sejam realizados em ambientes aproximadamente unidimensionais. Por exemplo, peixes de determinadas espécies buscam por alimentos em rios ou em costas litorâneas, assim como certas espécies de animais que buscam por alimentos nas interfaces de florestas. Em ambos os processos podemos imaginar que a busca ocorre ao longo de uma linha, ou seja, num espaço 1D. Já para o caso de buscas bidimensionais, diversos são os exemplos existentes na natureza.

2.5 Sistemas Complexos

Sistemas complexos é um tópico da física contemporânea presente em vários cenários da natureza, como na econofísica, biofísica, medicina, físico-química, cristais líquidos, clima terrestre, redes neurais, processos de busca etc. De uma forma geral, quando se une um grande número de sistemas, as propriedades macroscópicas ou coletivas não estão relacionadas diretamente com as propriedades dos seus constituintes individuais e, nesse caso, o sistema composto é chamado de *Sistema Complexo* [79]. Também pode ser entendido como um composto de muitos elementos e/ou subsistemas diferentes, que interagem espacialmente e temporalmente de forma não linear, gerando padrões emergentes que são observáveis apenas em escalas maiores quando comparados à escala de seus subsistemas [80]. Essa definição, portanto, permite que muitos sistemas se enquadrem como complexos. Além dos exemplos citados acima, podemos destacar alguns sistemas complexos que são relevantes para a compreensão científica de possíveis aplicações no contexto social, tal como vemos no estudo de turbulências, doenças em geral, processos epidêmicos, processos de extinções, trânsito em metrópoles, evolução de incêndio em florestas, etc. Em particular, podemos citar o mecanismo de busca aleatória (*foraging*), que é o foco desta tese e que também se configura como um sistema complexo.

Dentre esses sistemas, existem aqueles que são *Caóticos*, cuja principal característica é a sensibilidade às condições iniciais, e aqueles que são *Adaptativos* ou *Auto-Organizáveis*, ou seja, capazes de aprender e se adaptar com as experiências às quais estão relacionados, por exemplo, colônias de insetos, o cérebro de uma forma geral, ecossistemas e sistemas sociais. Também existem sistemas que são *Não-Lineares*, sistemas que não obedecem ao princípio de superposição, isto é, quando a soma do comportamento das partes do sistema não resulta no comportamento do sistema como um todo.

Uma das propriedades inerentes aos sistemas complexos é a invariância de escala. Na prática, essa propriedade é caracterizada por conservar propriedades físicas e matemáticas ao mudarmos a sua escala espacial. Em geral, denotamos essa característica como sistemas *auto-similares*. Fractais, por exemplo, são interessantes classes de objetos que apresentam tal propriedade. Matematicamente, a invariância de funções ou curvas pode ser obtida ao considerarmos a função $f(x) = ax^\beta$, pois dilatando (ou comprimindo) a escala da função por um fator h , teremos:

$$f(hx) = a(hx)^\beta = h^\beta ax^\beta = h^\beta f(x) \propto f(x) \quad (2.41)$$

Isso implica dizer que a curva não foi descaracterizada a menos do fator h^β multiplicada pela função, sendo h definido como o comprimento de escala. Generalizando, o requisito para que uma função $f(x)$ seja invariante sob todo processo de escala é usualmente tomado como sendo:

$$f(x) = \lambda^{-\alpha} f(\lambda x) \quad (2.42)$$

onde α é o expoente característico da função $f(x)$ para qualquer λ quando mudamos sua escala.

Nesse contexto surgem as Leis de Potência (*Power Laws*), que são relações polinomiais que exibem propriedades de invariância de escala. Tais leis de potência ocorrem em diversos fenômenos na natureza, como na lei de Coulomb, lei da gravitação universal etc, e tem um considerável respaldo científico uma vez que elas podem especificar e caracterizar o mecanismo da dinâmica dos sistemas complexos, assim entender o fenômeno natural sob investigação. Observemos que a função densidade de probabilidade do tamanho do passo numa caminhada de Lévy, $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, segue um comportamento tipo lei de potência, tendo portanto uma invariância de escala.

As leis de potência são geralmente consideradas como uma “assinatura” do sistema complexo em questão. Essa assinatura geralmente é observada quando representamos sua função na escala $\log - \log$, onde $\log f(x) = \alpha \log x$ evidencia a linearidade da função f nesta escala. Assim, uma forma prática e segura da verificação de existência de lei de potência para uma dada função, é graficar um dado conjunto de pontos na escala logarítmica.

2.6 Fenômenos Críticos e as Transições de Fase

Uma outra característica importante dos sistemas complexos é a presença de eventos críticos em determinadas condições na dinâmica do sistema. Em geral, a física de tais eventos ou pontos críticos é chamada de *Fenômenos Críticos*. Apesar da palavra “crítico”

ser usada na física com vários sentidos, aqui consideraremos o caso em que tal comportamento esteja relacionado à física estatística das transições de fase [81]. Esses fenômenos ocorrem, por exemplo, em sistemas que se encontram longe do equilíbrio, em processos no qual a história da dinâmica do sistema é importante [82]. Além disso, eles estão relacionados com a física dos pontos críticos, geralmente vistos em sistemas que apresentam transições de fase. Assim, a região em que tais sistemas apresentam uma mudança de comportamento (quando o sistema vai de uma fase “ordenada” para outra “desordenada”, por exemplo), é justamente aquela em que temos os pontos críticos, governados por *expoentes críticos* associados à divergência de certas quantidades físicas envolvidas na transição, como por exemplo, o comprimento de correlação, calor específico, susceptibilidade, etc. Um exemplo clássico é a transição de fase ordem-desordem no modelo de Ising bidimensional, que apresenta no limite termodinâmico a susceptibilidade magnética e o comprimento de correlação entre spins divergindo à medida que a temperatura se aproxima de um valor crítico e finito [83]. Outro sistema bastante conhecido onde ocorrem transições de fase, é o modelo de percolação direcionada (*directed percolation - DP*) [84]. Nesse sistema, a transição ocorre de uma fase ativa para um estado absorvente, ou seja, um estado irreversível [85] em que uma vez alcançado, jamais o sistema escapa dele. No caso da percolação direcionada, o estado absorvente é aquele em que não há nenhum sítio ativo num dado instante de tempo [84].

As teorias clássicas dos fenômenos críticos passaram por um processo mais rigoroso de análise a partir de 1960, quando foram desenvolvidas técnicas para a realização de experimentos na vizinhança dos pontos críticos [82]. Os resultados das experiências, bem como diversos outros resultados teóricos, apontavam para a existência de classes de universalidade [86, 87], definidas por alguns poucos expoentes críticos diferentes dos expoentes clássicos [88]. Em geral, o estudo de transições de fase representa uma boa forma de entender o comportamento desses pontos críticos, assim como o fenômeno crítico associado ao sistema. Nesse sentido, há dois tipos importantes de transições de fase: as transições de primeira ordem (transições descontínuas) e transições de segunda ordem (transições contínuas).

Uma transição de fase de primeira ordem é caracterizada por descontinuidades na primeira derivada da energia livre de Gibbs, implicando em transições abruptas das quantidades observáveis, além da presença de calor latente [89]. Como exemplo, temos a condensação da água ou o derretimento do gelo, na qual a passagem de um estado para outro ocorre numa dada temperatura com coexistência de fases. Já as transições de fase de segunda ordem, de uma forma geral, ocorrem na mudança de uma fase a outra de forma contínua, ou seja, não-abrupta. Elas se identificam com os fenômenos críticos, onde os valores das variáveis macroscópicas que especificam as condições nas quais a transição ocorreu, são conhecidos como pontos críticos [86]. Nesse tipo de transição, portanto, não

temos coexistência de fases. Além disso, é necessário que a primeira derivada da energia livre seja contínua e, no mínimo, que a segunda derivada da energia livre seja descontínua [90]. Para alguns sistemas, há transições contínuas para certas condições e transições descontínuas para outras. Por exemplo, a condensação de gases é uma transição de fase descontínua a baixas temperaturas e apresenta transição contínua distante de baixas pressões, no ponto crítico. Outro exemplo conhecido é o sistema para-ferromagnético, em que a magnetização do sistema sofre uma transição de segunda ordem quando é variada a temperatura do sistema [91].

Na análise de transições de fase, é bastante útil a definição de uma quantidade que descreva esse processo de transição. Tal quantidade geralmente é conhecida como parâmetro de ordem, que está em função de outra quantidade, chamada de parâmetro de controle. Assim, variando o parâmetro de controle, podemos analisar a evolução do parâmetro de ordem e estudar a transição do sistema. Este parâmetro comumente é definido de tal forma que seja identicamente zero na fase desordenada - maior entropia, definida como a fase após o parâmetro de controle crítico - e maior que zero (ou finito) na fase ordenada - menor entropia e definida antes do parâmetro de controle crítico. Escolher esse parâmetro para um dado sistema, geralmente não é uma tarefa trivial e está associada à ordem de longo alcance do sistema no limite termodinâmico [92]. Existem casos nos quais se faz necessário um maior rigor para tal escolha, mas a grosso modo podemos fazer de acordo com as condições supracitadas. Por exemplo, no sistema de percolação direcionada, o parâmetro de ordem é a densidade ρ de sítios ativos na rede, e o parâmetro de controle é a probabilidade p de conexão entre os sítios vizinhos. Dessa maneira, na vizinhança do ponto crítico, a relação entre tais quantidades se dá na forma:

$$\begin{aligned}\rho &\sim |p - p_c|^\beta \\ P &\sim |p - p_c|^{\beta'} \\ \xi_\perp &\sim |p - p_c|^{-\nu_\perp} \\ \xi_\parallel &\sim |p - p_c|^{-\nu_\parallel}\end{aligned}\tag{2.43}$$

onde P denota a probabilidade de sobrevivência de um sítio ativo (que também pode ser escolhido como o parâmetro de ordem do sistema), p_c é a probabilidade crítica de conexão, ξ_\perp é o comprimento de correlação espacial e ξ_\parallel é o comprimento de correlação temporal [84].

A figura 2.6 apresenta um exemplo onde há uma transição de segunda (a) e primeira (b) ordem entre o estado magnetizado (fase ordenada) e o estado desmagnetizado (fase

desordenada) para materiais magnetocalóricos¹⁰ [93] sujeitos à variação de temperatura. A transição de segunda ordem é claramente um processo contínuo, ao contrário da transição de primeira ordem. De uma forma geral, uma transição de fase pode ser apresentada conforme mostra o esquema na figura 2.7 e a tarefa de estudo, como já mencionado, se resume em identificar um parâmetro de ordem que evolui com a variação de um parâmetro de controle e que muda de fase num determinado ponto crítico. Veremos na próxima sessão como estimar esse ponto crítico, bem como calcular os expoentes que governam uma dada transição de fase.

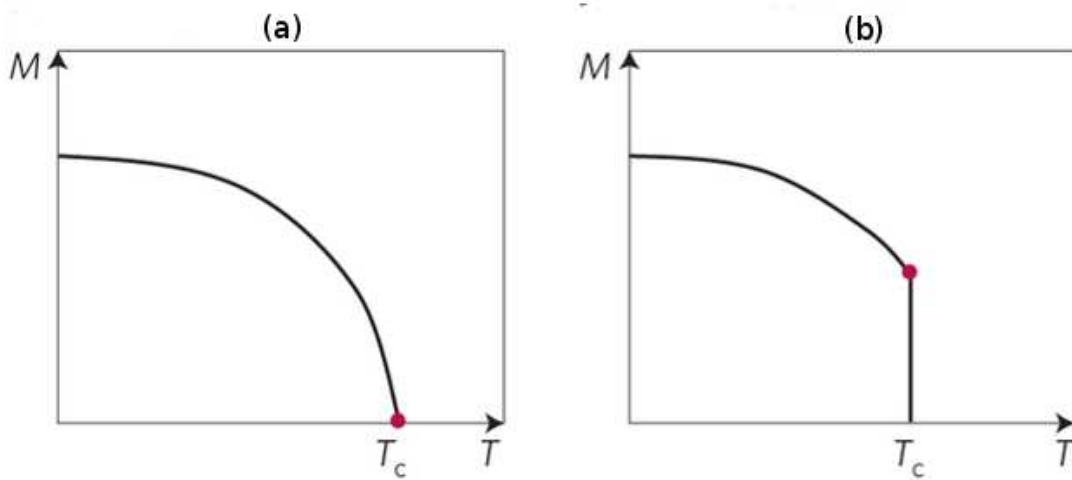


Figura 2.6: Em (a) temos a magnetização M indo continuamente para a fase desordenada (desmagnetizada). Já em (b), a magnetização M sofre uma transição descontínua para a fase desordenada no ponto crítico T_c [93]

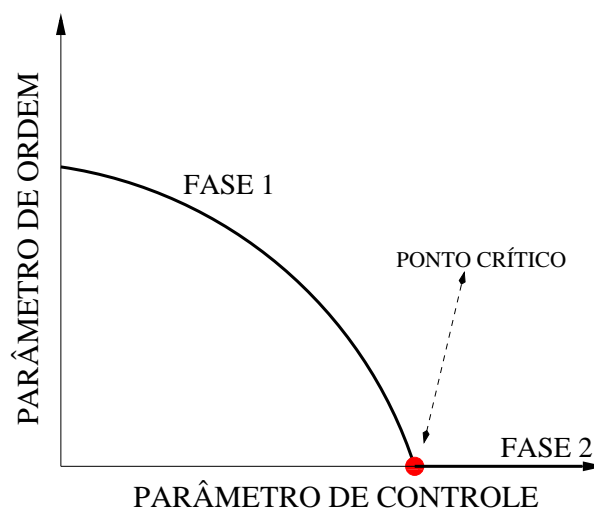


Figura 2.7: Esquema que mostra as quantidades e condições elementares para analisar uma transição de fase.

¹⁰Materiais Magnetocalóricos são definidos como materiais que sofrem aumento de temperatura quando sujeitos a um campo magnético. O estudo e caracterização desses materiais tem ganhado importância devido a enorme aplicabilidade tecnológica.

2.6.1 Leis de Escala de Tamanho Finito e a Renormalização Numérica Fenomenológica

Em alguns sistemas na natureza, determinados fenômenos emergem simplesmente devido às suas limitações geométricas. Nesse sentido, o comportamento de várias quantidades no limiar das transições de fase, que caracterizam o surgimento de um dado fenômeno, pode ser descrito por leis de escala no regime de sistemas grandes e finitos. Considerando P como uma quantidade a ser medida (digamos que seja o parâmetro de ordem do sistema) e que depende de outras quantidade (em particular, digamos que dependa de um parâmetro de controle p), quando a dependência de P em função de p é não-linear, então dizemos que P segue uma lei de escala (ou lei de potência - *power law*) dada por:

$$P(p) = h \times p^\alpha, \quad (2.44)$$

onde h é uma constante e α é um fator de escalonamento. No entanto, quando a dependência de $P(p)$ não está condicionada a todo o espaço, ou seja, quando varia conforme o tamanho do sistema L onde $P(p)$ é medida, então dizemos que há uma lei de escala de tamanho finito (também conhecida como *Finite Size Scaling*). No limite em que p segue para algum ponto crítico $p \rightarrow p_c$ (limite assintótico), fazendo emergir algum fenômeno relacionado à P (uma transição de fase, por exemplo), o comportamento passa a ser regido por uma lei de potência, onde α é chamado de *Expoente de Fisher*, sendo definido para grandes valores de L [94, 95].

$$P_L(p_c) \propto L^{-\alpha}. \quad (2.45)$$

Neste contexto, nas décadas de 1970 e 1980, muitos cientistas se interessaram pelo estudo de leis de escala no intuito de compreender alguns sistemas de tamanho finito que apresentavam transições de fase. Assim, alguns métodos foram desenvolvidos para analisar tais transições. Dentre eles, destaca-se o que foi desenvolvido por *Michael E. Fisher* em 1971 [94, 96], sendo bastante utilizado nos mais variados sistemas físicos, matemáticos ou biológicos. De acordo com a teoria de Fisher, qualquer variação de uma quantidade P_L de um sistema linear de tamanho L , pode ser escrita como:

$$P(p, L) \sim L^{-A} f(u), \quad (2.46)$$

para valores arbitrários de L , onde $f(u)$ é uma função analítica de argumento $u = L^B(p - p_c)$. Para diversos sistemas conhecidos, como processos de percolação, processos de contato, dinâmica de epidemias etc, o expoente $A = \beta/\nu$ e $B = 1/\nu$. Dessa forma:

$$P(p, L) \sim L^{-\beta/\nu} f[(p - p_c)L^{1/\nu}]. \quad (2.47)$$

No limite em que $L \rightarrow \infty$, P_∞ segue uma lei de potência tal que o expoente β/ν define o comportamento crítico da quantidade P e corresponde à dimensão de escala da quantidade avaliada [97]. Uma vez que o objetivo do problema é analisar o comportamento de sistemas de tamanhos finito L , o método propriamente dito busca escalar P com um novo fator de escala L_0 , tal que:

$$P(p, L_0) \sim L_0^{-\beta/\nu} f[(p - p_c)L_0^{1/\nu}]. \quad (2.48)$$

Dividindo a equação 2.47 por 2.48, temos:

$$\frac{P(p, L)}{P(p, L_0)} \sim \left(\frac{L}{L_0}\right)^{-\beta/\nu} \frac{f[(p - p_c)L^{1/\nu}]}{f'[(p - p_c)L_0^{1/\nu}]}. \quad (2.49)$$

Então, no caso onde o parâmetro de ordem evolui para a região $p \rightarrow p_c$, o comportamento da quantidade P tem uma dimensão de escala β/ν , e este expoente é o mesmo independente dos pares de L e L_0 que possamos obter no cálculo da equação 2.49. Portanto, o comportamento da quantidade P é tipo uma lei de potência na vizinhança do ponto crítico e o “expoente característico da transição” é denominado de expoente crítico. O cálculo do expoente $1/\nu$ é semelhante ao realizado para β/ν , bastando aplicar o método para a função derivada de $P(p, L)$ ou para a função derivada do logaritmo de $P(p, L)$.

Este método é bastante utilizado em diversos sistemas e modelos envolvendo escalas de tamanho finito e que apresentam algum tipo de transição de fase em sua dinâmica. Portanto, pela confiança e aplicabilidade desse método, o mesmo será utilizado nesta tese para analisar as transições de fase presentes em processos de buscas, de acordo com o exposto nos próximos capítulos.

2.6.2 Classes de Universalidade

A ideia de comportamento “universal” de certos sistemas foi desenvolvida por L. P. Kadanoff [98] por volta da década de 1970. A ideia original tratava da compreensão dos fenômenos físicos em torno dos pontos críticos, onde o comprimento de correlação é muito maior do que qualquer outro comprimento que afeta ou caracteriza o comportamento do sistema. Sobretudo, somente uma descrição apropriada do sistema em comprimentos de escala da ordem do comprimento de correlação, seria importante para a caracterização do sistema em torno do ponto crítico. Nesse sentido, uma quantidade indispensável, criada para tal descrição, é o parâmetro de ordem. Esse parâmetro e outras variáveis termodinâmicas variam conforme o sistema se aproxima do ponto crítico da transição de fase de um certo sistema, caracterizada pelos expoentes críticos associados. Estes, por sua vez, têm uma característica bastante peculiar: são insensíveis a detalhes macroscópicos e dependem somente de características mais gerais do sistema, como a dimensionalidade

espacial (1D, 2D,...) e a dimensão de seu parâmetro de ordem (número de componentes do parâmetro - graus de liberdade). Alguns sistemas com mesma dimensionalidade e diferentes quanto à estrutura e mecanismo microscópico possuem os mesmos expoentes críticos e com isso formam o que é denominado de *Classe de Universalidade* [86]. O sistema ferromagnético uniaxial (que pode ser descrito pelo modelo de *Ising* [99]), é um simples sistema de duas misturas líquidas que pertencem à *classe de universalidade de Ising*. Já o sistema Líquido ^4He e o modelo-XY são membros da mesma *classe de universalidade XY* [99] e o sistema ferromagnético isotrópico, descrito pelo modelo de Heisenberg, pertence à *classe de universalidade de Heisenberg* [99].

Em particular, um exemplo de classe de universalidade bem consolidada e abrangente, é aquela que é formada pelos expoentes críticos que governam as transições de fase nos processos de percolação direcionada¹¹. É uma classe abrangente porque gera mesmos expoentes universais quando obtidos por outros sistemas dinâmicos, tal como processos epidêmicos, processos de contato, sistemas de polímeros ramificados dentre outros vários sistemas, inclusive com estados absorventes [87]. Um desses sistemas trata-se justamente do processo de buscas aleatórias, cujas transições entre as fases de sobrevivência e extinção (apresentadas e discutidas nesta tese) indicam apresentar expoentes críticos pertencentes à essa classe de universalidade.

De posse de alguns fundamentos teóricos relacionados com a física de buscas aleatórias, torna-se possível compreender o modelo de busca, a dinâmica energética associada ao sistema, as transições de fase a serem apresentadas, entre outros aspectos estatísticos relacionados ao problema, conforme os capítulos a seguir.

¹¹Mais detalhes sobre a teoria de percolação direcionada encontram-se no Apêndice C.1

Dinâmica de Busca em Redes Unidimensionais

3.1 O Problema

É fato reconhecer que uma grande parte do tempo de vida de diversos animais é dedicada à busca por alimentos. Essa dedicação, obviamente, é para dar continuidade ao processo metabólico do organismo, garantindo assim a sua sobrevivência. Uma outra parte do tempo de vida é dedicada à procura por companheiros(as) sexuais com o interesse na reprodução e evolução da espécie. Nesse contexto, um alvo a ser encontrado pode estar em movimento ou em repouso em relação ao organismo buscador e sua localização a priori não é conhecida, como já discutido anteriormente. Assim, é fundamental para o buscador realizar uma caminhada aleatória que seja eficiente, minimizando o tempo e a energia necessária na procura por alvos.

No começo da década de 70, *Hassell* e *May* [18] descobriram que trajetórias balísticas formam uma estratégia de busca de alguns animais predadores [18]. Também foi constatado que algumas espécies de peixes (tubarões [100]), de mamíferos (macacos-aranhas [101]) e de aves-marítimas (albatrozes [9]), apresentam processos de busca balísticas, oriundas das caminhadas de lévy. Já algumas outras espécies de peixes e insetos intensificam o processo de busca em períodos de escassez de comida [4, 45] - baixa densidade de alvos - aumentando a difusão de seus movimentos quando comparados às condições normais. Todos esses fatos são motivações para o estudo da evolução energética durante uma busca por alvos, no sentido de entender como a mudança na dinâmica do sistema favorece (ou não) à sobrevivência em ambientes de baixas densidades de alvos.

De uma forma geral, nosso problema se resume em compreender de que forma um

processo dinâmico consegue alcançar um determinado estado estacionário de vida apenas através de recursos obtidos do próprio processo, ou seja, como a busca aleatória proporciona o estado de sobrevivência de um organismo buscador sem que seja necessário fornecer energia extra. Relacionado a esta questão, conceitos como criticalidade auto-organizada são considerados importantes para entender sistemas que se auto-ajustam durante o processo dinâmico. Temos, portanto, um problema de processos reação-difusão, que apresenta uma vasta aplicação em física, química, biologia, ecologia, dentre outras áreas.

Em particular, alguns estudos mostraram que a natureza na dinâmica de difusão (caminhadas aleatórias brownianas *versus* caminhadas de Lévy) tornam-se relevantes em baixas dimensões [39, 40]. Nesse sentido, trabalhos recentes abordam alguns fenômenos usando caminhadas aleatórias para descrever o movimento de animais em busca, assim como também compreender a taxa de encontro entre animais e alvos num modelo denotado por sistema predador-presa. Em nosso problema de estudo, vamos considerar um caminhante buscador realizando uma caminhada aleatória a procura por alvos que também se movimentam aleatoriamente e que podem somente ser detectados dentro de um raio máximo de visão r_v do buscador. Como vários aspectos de busca (otimização, por exemplo) não dependem fortemente da dimensão do espaço [10], abordaremos então a situação mais simples, ou seja, 1D.

O problema da busca aleatória [4, 10, 46, 76, 77], em particular no contexto ecológico, nos mostra como otimizar a eficiência de busca partindo de uma distribuição de lei de potência dos comprimentos dos passos sorteados ℓ realizados pelo buscador:

$$P(\ell) \sim \ell^{-\mu} \quad (3.1)$$

com $1 < \mu \leq 3$ e $\ell > r_v$. Para $\mu \geq 3$ temos caminhadas brownianas e para $1 < \mu < 3$ caminhadas de Lévy. Para $\mu \leq 1$, a distribuição não é normalizada. Alguns estudos mostram que no limite de baixas densidades de alvos, o valor $\mu_{opt} = 2$ é o expoente que otimiza a busca quando os alvos fixos podem ser encontrados várias vezes depois de um tempo τ entre tais encontros, portanto caracterizando um processo de busca não-destrutiva. Por outro lado, $\mu_{opt} \rightarrow 1^+$ quando os alvos podem ser encontrados apenas uma única vez, que corresponde ao caso de buscas destrutivas [31–33].

3.2 Modelo de Busca

Nós simulamos dois caminhantes aleatórios - buscador e alvo - com velocidades escalares constantes e idênticas, numa rede periódica 1D, cujo comprimento dos passos é calculado através do método da inversão (Apêndice A) obtido a partir da distribuição

dada pela equação 3.1 [102], tal que:

$$\ell_j \sim u_j^{1/(1-\mu)} \quad (3.2)$$

onde u_j é uma variável aleatória distribuída uniformemente no intervalo (0,1). Variando o parâmetro μ , podemos estudar a melhor estratégia de busca que permite a sobrevivência do buscador no limite de baixas densidades de alvos. Trataremos do caso particular de alvos destrutíveis, ou seja, imediatamente após o processo de encontro o alvo é destruído, então um novo alvo surge numa posição aleatória da rede. O mecanismo de movimentos dos caminhantes segue as regras:

1. O buscador e o alvo iniciam numa posição aleatória de uma rede de tamanho z ;
2. De forma aleatória, o buscador e o alvo escolhem um sentido de movimento com probabilidade 1/2 de ir para a direita ou para esquerda, logo caracterizando uma caminhada tipo markoviana (sem memória). Também escolhem um tamanho de caminhada ℓ_j (obedecendo a condição $r_v < \ell_j \leq z/2$) e movem-se com velocidade constante. Essa condição é imposta porque, à medida que $\mu \rightarrow 1^+$, maiores são os comprimentos de ℓ_j sorteados, como podemos ver na figura 2.5. Assim, os caminhantes sorteiam um novo comprimento de caminhada sempre que $\ell_j \geq z/2$. Caso não existesse essa condição, poderíamos ter ℓ_j tão grande que o buscador ou o alvo percorreriam todo o espaço de busca (rede finita com condições periódicas de contorno) num único salto, o que não caracteriza um processo de forrageio;
3. Uma energia ξ é associada à dinâmica do buscador, possibilitando analisar o custo energético de locomoção durante o processo de busca. Inicialmente temos $\xi = \xi_0$ e a cada caminhada j executada, o buscador perde uma energia α_j . Aqui assumimos que $\alpha_j = \alpha \ell_j$, onde α é uma constante, ou seja, o custo energético é diretamente proporcional ao quanto se locomove;
4. O buscador, a cada passo durante a caminhada, verifica se o alvo está em seu raio de visão, ou seja, se $|x_b - x_a| \leq r_v$, onde x_b e x_a representam a posição do buscador e do alvo, respectivamente. Se nenhum alvo for detectado depois de ℓ_j , então o buscador retorna ao passo 2;
5. Se o alvo é detectado, então ele é eliminado e o buscador ganha uma energia constante que denotamos como g . Em seguida um novo alvo é criado numa posição aleatória da rede (caracterizando um processo de busca destrutiva) e a dinâmica continua partindo da regra 2.

Tais regras podem ser ilustradas de acordo com a figura 3.1, onde apresentamos um caso hipotético dessa dinâmica de movimento do sistema buscador-alvo.

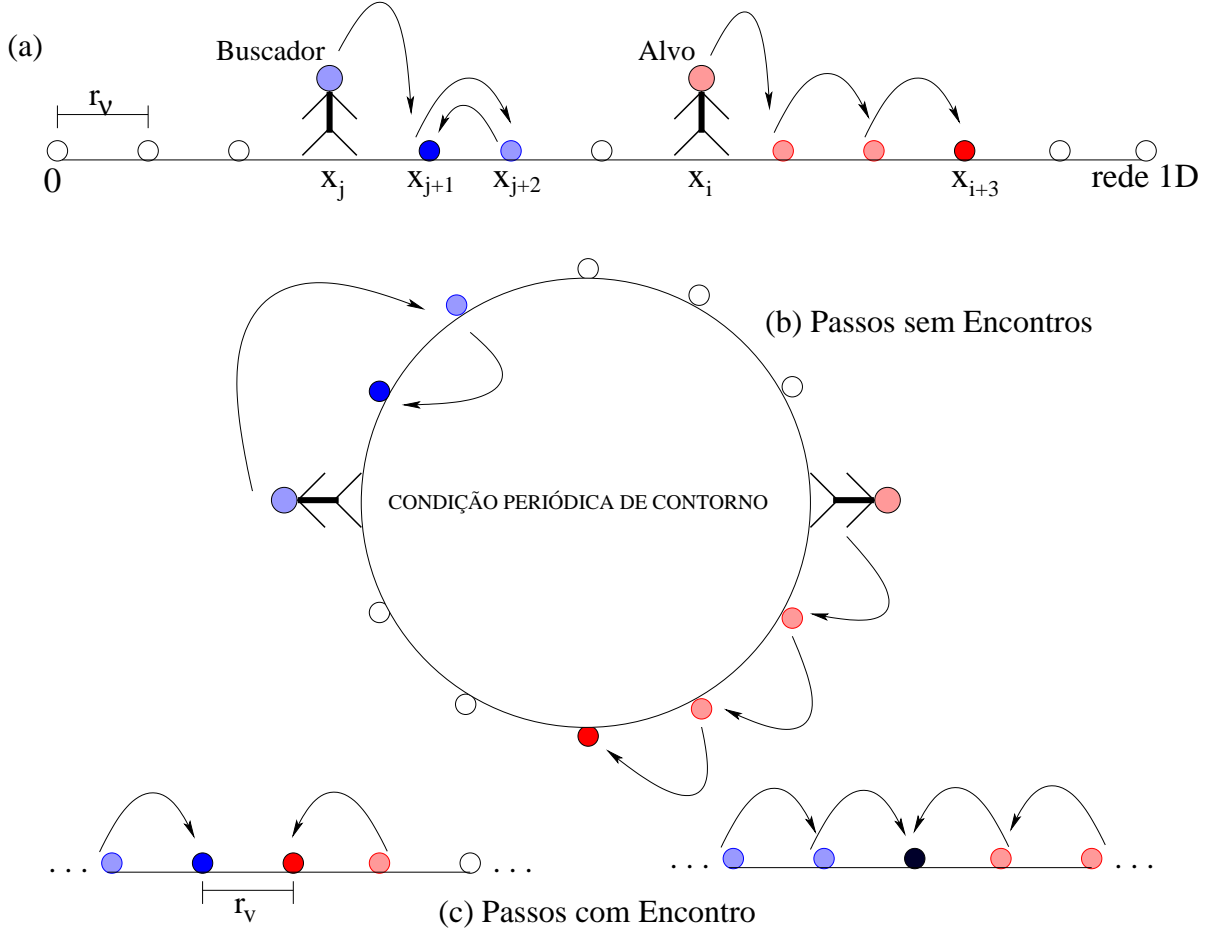


Figura 3.1: Um exemplo da dinâmica do modelo numa rede discreta: (a) o buscador, caracterizado pela cor azul, começa a caminhar na posição x_j (as bolas na rede representam as possíveis posições a serem ocupadas pelos caminhantes). Escolhido um sentido de deslocamento e comprimento de caminhada ($\ell_j = 2$ para a direita) ele vai até a posição x_{j+2} verificando em cada sítio se há um alvo em seu raio de visão r_v . Como nenhum alvo é encontrado, ele escolhe uma nova configuração de voo ($\ell_{j+1} = 1$ para a esquerda) e continua a dinâmica de busca. Por outro lado e de maneira simultânea, o alvo (simbolizado pela cor vermelha) começa na posição x_i e escolhe uma configuração de caminhada ($\ell_i = 3$ para a direita) indo até a posição x_{i+3} , passo a passo. Notemos que $t = 3$, isto é, 3 passos ocorreram durante essa parte da simulação. (b) A dinâmica obedece a uma condição periódica de contorno. Em (c) temos os casos possíveis de encontro, onde $|x_j - x_i| \leq r_v$. Nesta situação o alvo é capturado e um novo surge numa posição aleatória da rede, dando continuidade à dinâmica.

Podemos observar que o esboço da figura 3.1 representa uma busca do tipo “discreta”. Em outras palavras, a posição dos caminhantes bem como o tamanho dos voos, assumem valores inteiros, pois uma vez sorteadas as distâncias ℓ , a distância efetiva percorrida é dada por $h r_v$ sendo h a parte inteira de ℓ / r_v . Esse tipo de caminhada é interessante pois simplifica as simulações. Além disso, do ponto de vista físico, notamos que muitos sistemas apresentam uma dinâmica no espaço discreto (como percolação direcionada, modelos de queimadas em florestas, processos de contato etc). Por outro lado, do ponto de vista biológico, é mais realístico se as posições e comprimentos de voos sorteados tomarem

quaisquer valores no espaço real, uma vez que o ambiente de busca na natureza equivale a um espaço contínuo. Nas próximas sessões, apresentaremos alguns resultados comparando estes dois espaços de busca, mas daremos ênfase ao longo dos próximos capítulos para a busca no espaço discreto, justamente por possibilitar uma conexão com outros sistemas físicos bem estudados e compreendidos na literatura associada.

Assim, o modelo aqui apresentado permite analisar a quantidade de energia acumulada depois de N passos realizados (ou t tempos de busca) $\xi(t)$, assim como a taxa de sobrevivência de uma espécie de M buscadores simulados. Se por um lado a energia acumulada $\xi(z, t)$ mostra a evolução energética do estado de sobrevivência de um dado buscador, permitindo avaliar em quais tipos de caminhada¹ a energia líquida é positiva com o tempo ($\xi(t) - \xi(t_0) \geq 0$), por outro a taxa de sobrevivência possibilita analisar a fração de buscadores $\Gamma(t, z)$ que conseguem sobreviver até um dado tempo e configuração de rede. Desta forma, podemos analisar o comportamento da curva $\Gamma(t, z) \in [0, 1]$ à medida que é variada a densidade de alvos no sistema. Tais resultados são apresentados nas próximas sessões.

3.3 Efeitos de Discretização do Espaço de Busca

O modelo de busca discutido na sessão anterior origina duas possibilidades de dinâmica: caminhar discretamente ou continuamente. A caminhada discreta implica na formação de um espaço de busca onde as possíveis posições se encontram em “sítios” na rede. Se a distância entre esses sítios é uma constante γ , então o comprimento dos saltos a serem realizados também devem ser múltiplos dessa constante. Por simplicidade, definindo $\gamma = 1$ e considerando uma rede finita de tamanho z , obtemos um espaço formado por z sítios ou possíveis estados de localização e $z/2$ valores possíveis para a escolha do tamanho da caminhada, conforme a condição de truncamento apresentada no modelo de busca. Em contrapartida, a caminhada contínua abrange todo o espaço real no limite do tamanho da rede $(0, z]$, gerando infinitos estados de localização na rede e comprimentos de voos sorteados. Portanto, surge a seguinte pergunta: *a limitação dos estados de posição no espaço discreto gera alguma mudança qualitativa ou quantitativa na distribuição de passos sorteados pelos caminhantes?* Responder tal pergunta é importante para a devida interpretação das quantidades dinâmicas a serem calculadas. Se as distribuições forem diferentes, então o modelo de busca deverá ter duas variantes, uma aplicada ao caso discreto, outra ao contínuo. Caso contrário, o modelo poderá ser generalizado para qualquer espaço de busca e particularizado apenas nos pontos em que a dinâmica apresentar alguma especificidade com relação ao espaço (densidade crítica, por exemplo). Assim, um

¹ μ_s (μ_t) é parâmetro de caminhada do Buscador - “*Searcher*” (Alvo - “*Target*”).

aspecto a ser comparado são as distribuições do tamanho das caminhadas sorteadas para diferentes parâmetros de difusão μ e comprimentos de rede.

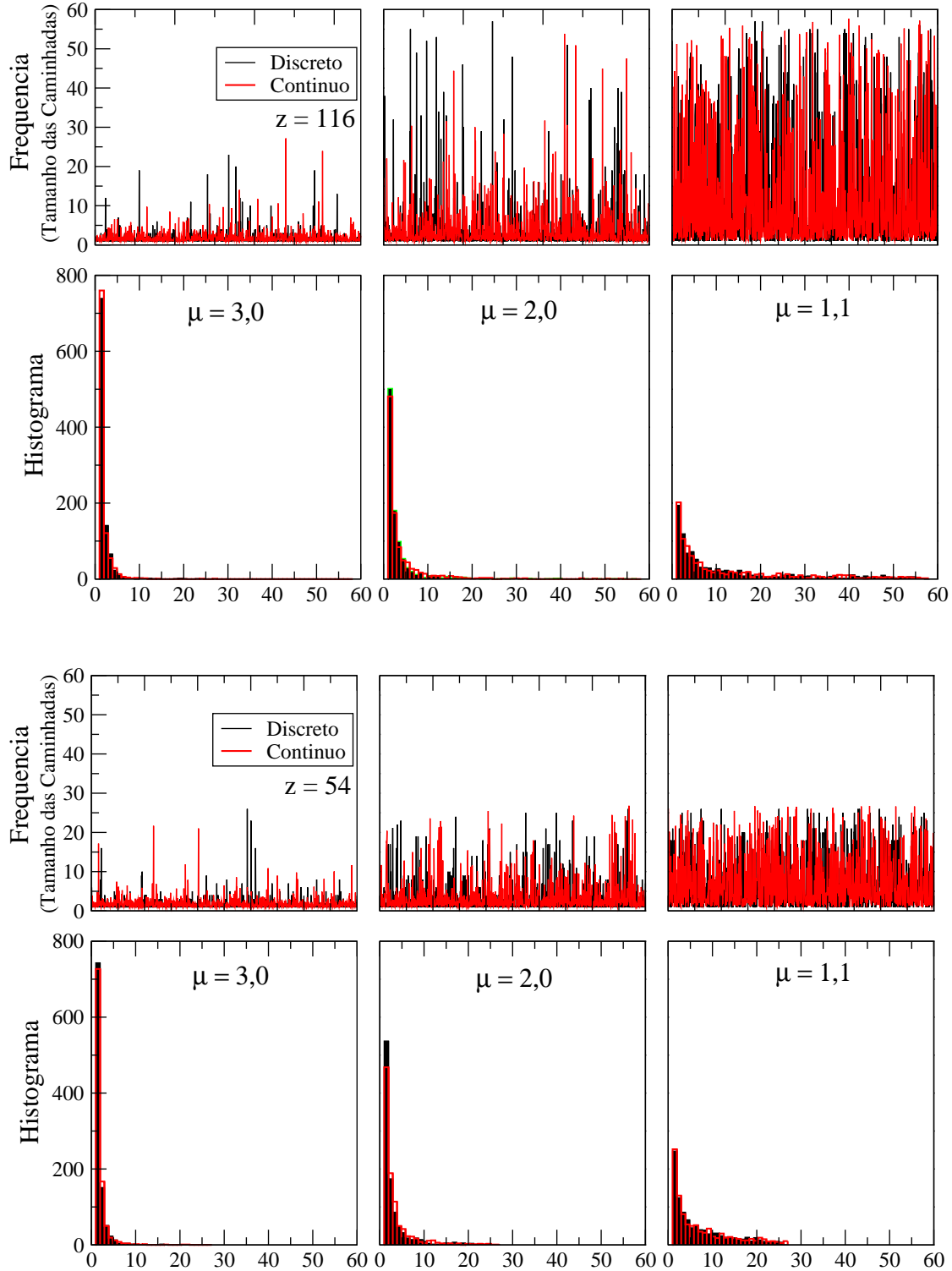


Figura 3.2: As figuras representam as frequências do tamanho dos saltos escolhidos (e seus respectivos histogramas) para espaços de buscas discretas e contínuas, tomando como base três parâmetros de difusão ($\mu = 3,0$, $\mu = 2,0$ e $\mu = 1,1$) e dois valores de rede: $z = 116$ (fig. acima) e $z = 54$ (fig. abaixo). A concordância quantitativa da distribuição de voos, leva à similaridade dinâmica do modelo, independente das características do espaço de busca.

A primeira observação na figura 3.2, é que $\mu = 3,0$ produz resultados similares para pequenas ou grandes redes, como esperado devido às características de um movimento browniano. Contudo, esse comportamento não ocorre à medida que $\mu \rightarrow 1^+$, como também esperado, uma vez que as chances de sorteios para maiores saltos crescem nesse limite de μ . De fato, uma boa parte dos saltos se encontram próximos de $\ell_{max} = 58$ para rede $z = 116$ e $\ell_{max} = 27$ para rede $z = 54$. Nesse contexto, as distribuições de voos estão de acordo com o esperado pela dinâmica. Uma segunda e importante observação é que as distribuições no espaço discreto são similares quantitativamente ao espaço contínuo, permitindo que a medida das quantidades físicas de interesse nesse problema possam ser interpretadas de forma equivalente para buscas no espaço discreto ou contínuo. No entanto, como veremos no capítulo 5, algumas variações dos parâmetros energéticos (ξ_0 , α e g) interferem no comportamento da transição da fase de sobrevivência para a extinção de acordo com o espaço adotado (discreto ou contínuo). Portanto, a evolução de algumas quantidades na região dos pontos de transição de fase (vizinhança dos pontos críticos), podem ser afetadas pela discretização no espaço de busca. Fora desse regime, a dinâmica mostra ser equivalente.

3.4 Evolução Energética

A energia é uma quantidade fundamental para o início e evolução no processo de busca. No contexto de movimento ecológico, como principal motivação, as condições de gasto e obtenção de energia determinam a dinâmica de movimento. Isso reflete, como já mencionado, a grande importância de otimizar o encontro de alimentos como sendo um fator primordial para a sobrevivência de um dado animal ou organismo em condições de escassez. Portanto, torna-se importante analisar como a função energia de um dado buscador evolui com o tempo e com a densidade de alvos. Observa-se que o modelo engloba apenas 1 buscador e 1 alvo durante uma simulação. Assim, variando o comprimento de rede z , equivale variar a densidade de alvos, ou seja, quanto menor o comprimento da rede, maiores chances tem o buscador de encontrar o alvo, caracterizando uma alta densidade. E quanto maior o comprimento da rede, menores as chances de encontro, logo uma densidade baixa de alvos. A equação dinâmica que governa o ganho energético líquido $\xi(z, t)$ basicamente depende de três parâmetros: a energia inicial ξ_0 , o custo energético de locomoção por passo α e o ganho de energia g caso ocorra algum encontro. Assim:

$$\xi_t = \xi_0 + \sum_{i=1}^t (g\delta_i - \alpha_i), \quad (3.3)$$

que $\rho \approx \rho_c$. Logo, para todo $\rho < \rho_c$ a busca é ineficiente e leva o buscador à extinção. Para $\rho > \rho_c$ a busca é eficiente e a energia do buscador evolui ao longo do tempo. E para $\rho \approx \rho_c$ representa o limiar entre as fases de sobrevivência e morte do buscador. Para ilustrar quantitativamente estes resultados, podemos graficar a energia versus tempo para várias densidades de alvos, conforme mostrado na figura 3.4, onde tomamos $\xi_0 = 10^4$ para melhorar a visualização da queda energética em baixas densidades. Podemos verificar então que ρ_c nos fornece um valor densidade de alvo que está na transição entre as fases que evoluem para a sobrevivência e morte. Assim, a figura 3.4 é um primeiro forte indício que existe transição de fase controlada pela densidade de alvos na rede.

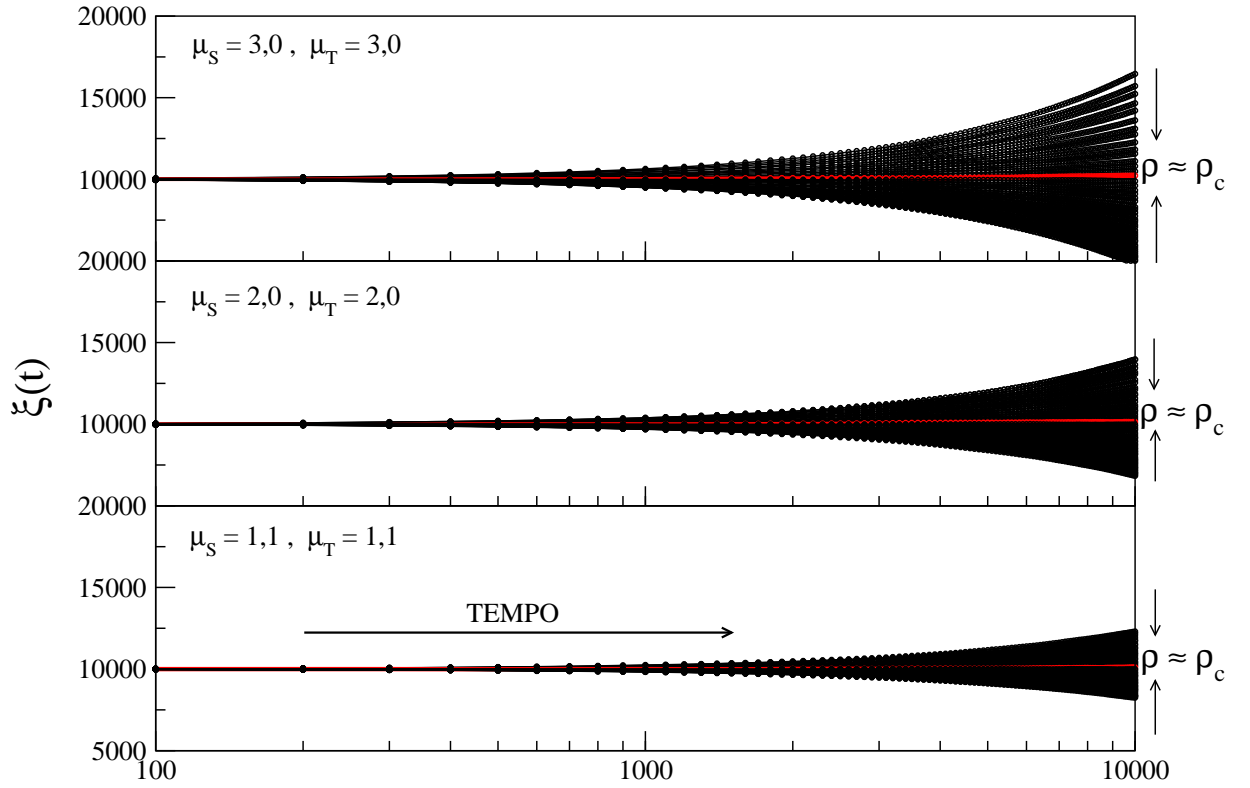


Figura 3.4: Evolução energética ao longo do tempo para três pares de difusão (μ_s, μ_t) (as demais combinações de μ apresentam o mesmo comportamento qualitativo e não são mostradas aqui para não sobrecarregar a figura). A linha vermelha retrata o valor de ρ onde não há evolução da energia (independente do tempo de busca), caracterizando, portanto, a quantidade ρ_c . Notamos que para $\rho < \rho_c$ (curvas abaixo da linha vermelha) a dinâmica segue para extinção. Para $\rho > \rho_c$ (curvas acima da linha vermelha) a dinâmica segue para a sobrevivência do buscador.

Ao analisar os valores em que $\rho \rightarrow \rho_c$ como função de μ , constatamos que a maior eficiência de busca ocorre quando a estratégia adotada foge da difusão browniana, ou seja, quando temos valores de $\mu \rightarrow 1^+$ (estratégia de busca balística). Notamos também que alvos superdifusivos favorecem à sobrevivência do buscador. Com isso, podemos compilar todos os valores de ρ_c e construir uma tabela que mostre as estratégias de caminhadas que são mais eficientes em baixas densidades de alvos (Tab. 3.1). Vale ressaltar que para

um determinado par de caminhadas $\mu_s = x$ e $\mu_t = y$ (onde x e $y \in (1, 3]$) temos

$$\rho_c|_{\mu_s=x, \mu_t=y} \approx \rho_c|_{\mu_s=y, \mu_t=x} \quad (3.4)$$

ou seja, a dinâmica de busca depende essencialmente do número de encontros entre organismos, tornando-se indiferente quando trocamos os valores de $\mu_s \rightleftharpoons \mu_t$ durante a caminhada, como também observado na tabela 3.1

Com base nestes resultados, podemos concluir que a sobrevivência de um organismo em momentos de escassez de alvos depende claramente do tipo de caminhada escolhida para a busca. Embora a diferença entre as estratégias não sejam significativas em altas densidades de alvos, uma vez que alta concentração diminui a importância de otimização de busca, a dinâmica específica é de suma importância nos limites críticos de densidade de alvos. Além disso, considerando um ecossistema dinâmico real (com vários predadores e presas), podemos dizer que nosso modelo fornece uma avaliação média quanto ao ganho energético, bastando assumir que cada indivíduo de uma determinada espécie tem uma energia calórica próxima a um dado valor médio. Então podemos esperar que uma espécie entrará inteiramente em extinção se a densidade de alvos per capita cair significativamente abaixo de um valor mínimo.

μ_s	μ_t	Densidade crítica de sobrevivência ρ_c	$\lambda_c \equiv \rho_c^{-1}$
3,0	3,0	1,852	0,54
3,0	2,0	1,409	0,72
3,0	1,1	1,042	0,96
2,0	3,0	1,389	0,72
2,0	2,0	1,163	0,86
2,0	1,1	0,962	1,04
1,1	3,0	1,021	0,96
1,1	2,0	0,961	1,04
1,1	1,1	0,869	1,15

Tabela 3.1: Densidades críticas conforme conjuntos de parâmetros μ_s e μ_t [45]. Nota-se a eficiência na estratégia de busca balística $\mu_{s,t} \rightarrow 1^+$ sobre as demais combinações de $\mu_{s,t}$. A otimização, portanto, foge do comportamento browniano.

3.5 Taxa de Sobrevivência

A *Taxa ou Fração de Sobreviventes* - $\Gamma(\rho, t)$ surge como uma candidata de investigação (um “bom” parâmetro de ordem) para uma transição de fase na dinâmica de busca, conforme os resultados da figura 3.4 apontam. O critério utilizado para escolher essa quantidade se baseou no fato de que $\Gamma(\rho, t)$, por caracterizar uma *Probabilidade de So-*

brevivência, é uma função que varia no intervalo $[0, 1]$ e se relaciona com $\xi(\rho, t)$ da forma: se $\Gamma(\rho, t) = 0$, então todas as amostras de buscadores simulados morreram ($\xi(t) = 0$). Isso acontece sempre que $\rho < \rho_c$, em baixas densidades de alvos quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, $0 < \Gamma(\rho, t) < 1$ diz que alguns buscadores conseguiram sobreviver, portanto representando a sobrevivência da espécie. Em outras palavras, $\Gamma(\rho, t)$ caracteriza duas fases distintas: a fase onde todos ou alguns buscadores sobrevivem e a fase onde todos os buscadores morrem. Tais fatores indicam que a quantidade $\Gamma(\rho, t)$ é uma boa candidata a caracterizar a ordem na dinâmica de busca quando o sistema varia de baixas a altas densidades. Já o parâmetro de controle, como comentado anteriormente, é a densidade de alvos, que depende do tamanho z da rede. É importante notar que usualmente a variação positiva de um parâmetro de ordem ocorre no sentido onde os valores são positivos (“fase ordenada”) para os valores nulos (“fase desordenada”), conforme visto na sessão 2.6. Assim, é conveniente adotar $\lambda = 1/\rho$ como parâmetro de controle, ao invés de ρ , uma vez que altas densidades implica em menores valores de λ e maiores valores de $\Gamma(\lambda, t)$. Também notamos que a taxa de sobreviventes depende do tempo de busca, de maneira que quando $t \rightarrow \infty$, $\Gamma(\lambda) \rightarrow cte$ para $\lambda < \lambda_c$ e $\Gamma(\lambda) \rightarrow 0$ se $\lambda > \lambda_c$. Essas constatações serão confirmadas logo a seguir.

Na prática, para obter a taxa de sobrevivência de buscadores, realizamos simulações sobre um conjunto de 10^4 buscadores, considerando a dinâmica de busca com um dado valor de λ e t . Após todas as realizações, encontramos o percentual ou fração dos buscadores que sobreviveram ao final de t , gerando assim um valor de $\Gamma(\lambda, t)$. Visando ter boas médias estatísticas dessa quantidade, repetimos este procedimento $R = 100$ vezes, o qual nos fornece um valor final $\langle \Gamma(\lambda, t) \rangle$. Tomando como parâmetros $\xi_0 = 100$, $\alpha = 1$, $g = 100$ e $r_v = 1$, buscamos analisar como evolui $\Gamma(\lambda, t)$ quando variamos as estratégias de buscas μ_s e μ_t , conforme figura abaixo. Podemos perceber que $\Gamma(\lambda, t)$ sofre uma transição tipicamente contínua quando é variado λ , de modo que λ_c caracteriza o ponto de transição no limite de tempos grandes. O interessante é que esse ponto crítico (no caso de $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$) corresponde ao mesmo valor apresentado na tabela 3.1. Para as demais combinações de difusão μ 's, os pontos críticos também correspondem aos da tabela citada, conforme figura 3.6. Tais confirmações indicam que λ_c de fato é um ponto crítico, separando duas fases do sistema: uma na qual existe alguma sobrevivência dos buscadores ($0 < \Gamma \leq 1$) e outra na qual todos os buscadores morrem ($\Gamma = 0$). Estas observações sugerem, portanto, uma transição de fase de segunda ordem na borda da extinção. Um paralelo importante que se faz presente neste modelo, é que o tempo tem o mesmo papel que o tamanho do sistema, como também visto em diversos outros modelos onde há transições contínuas, como no Modelo de Ising, por exemplo [83]. Tal correspondência é interessante porque o tempo no modelo de buscas aleatórias equivale ao número de passos efetuado pelo buscador. Nesse sentido, aumentar o tempo pode ser interpretado

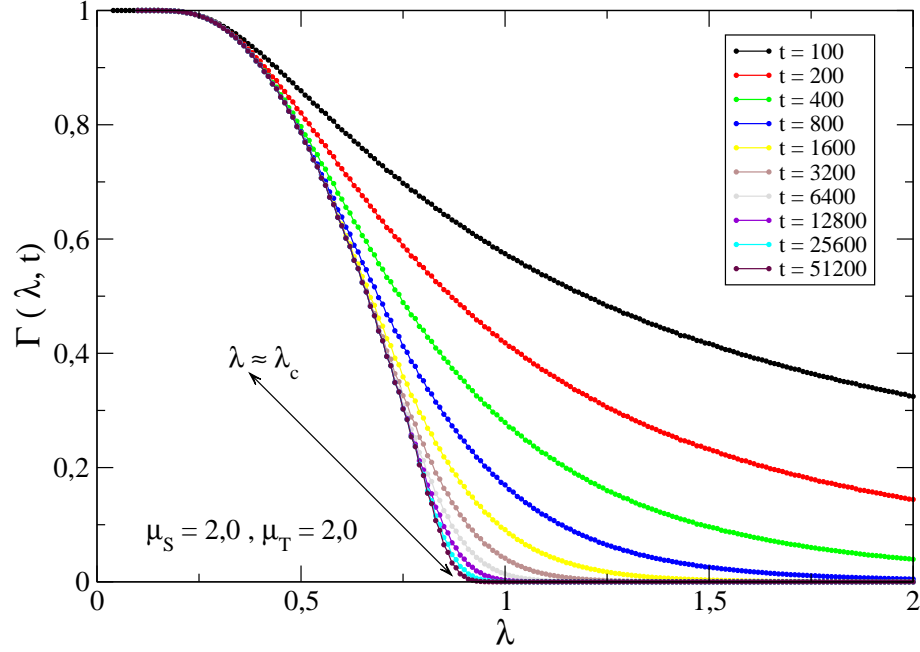


Figura 3.5: Comportamento estatístico de $\Gamma(\lambda, t)$ versus λ para diferentes valores de t , onde $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$. A função $\Gamma(\lambda, t)$ demonstra ser contínua à medida que $\lambda \rightarrow \lambda_c$ e $t \rightarrow t_{max}$.

como o aumento do “espaço” de busca. Por esse motivo, quando $t \rightarrow \infty$ as curvas de $\Gamma(\lambda)$ tendem a se colapsar no limite em que define a fase de sobrevivência e extinção, da mesma forma que ocorre em outros sistemas com transições contínuas. Contudo, vale salientar que em termodinâmica, usualmente consideramos sistemas infinitos para discutir suas propriedades gerais. Já em dinâmica de buscas (principalmente em biologia), não há sentido em considerar tempo infinito, visto que processos de buscas são caracterizados por tempos longos, mas finitos. Nesse sentido, nosso modelo efetivamente deve considerar um tempo t finito, mas grande o suficiente para caracterizar um processo real de busca.

Conforme a teoria de transições de fase, as flutuações tendem a aumentar quando o parâmetro de controle se aproxima do ponto crítico [103]. Esse aspecto pode ser visto na figura 3.6 para o caso $\mu_s = \mu_t = 2,0$ (como exemplo), onde o comportamento da dispersão de $\Gamma(\lambda)$ tende a se aproximar de λ_c . Enfim, através da taxa de sobrevivência, podemos concluir que mecanismos de buscas aleatórias de fato apresentam processos de transições de fase. Assim, torna-se interessante investigar os expoentes críticos que governam tais transições e verificar qual relação existe entre as variadas formas de caminhar (variando o parâmetro μ) durante a procura por alvos, questão a qual será vista no próximo capítulo.

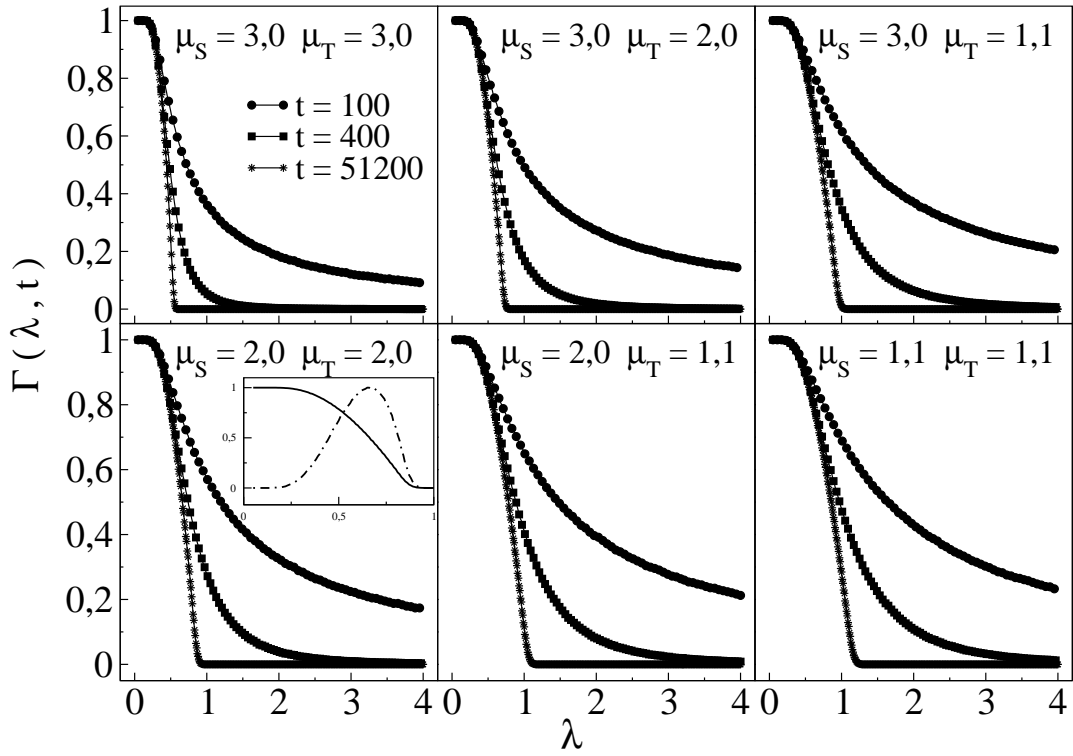


Figura 3.6: A Taxa de Sobrevivência como função de λ para outros pares de difusão buscador-alvo em três tempos distintos. Para $\mu_s = \mu_t = 2,0$ e $t = 51.200$, mostramos como se comporta a curva de $\Gamma(\lambda)$ e sua correspondente variância normalizada (curva pontilhada).

Dinâmica das Transições de Fase em Buscas 1D

4.1 Expoentes Críticos Dinâmicos

No Capítulo 2 discutimos a metodologia que *Fisher* [96] e colaboradores elaboraram visando caracterizar as transições de fase em sistemas de tamanho finito. O objetivo destes estudos foi fornecer uma descrição do sistema nas proximidades dos pontos críticos onde as propriedades dinâmicas são invariantes sob certas transformações de escala. Por exemplo, o comprimento de correlação espacial em modelos de percolação direcionada (definido como a distância média entre dois sítios que pertencem a um mesmo *cluster* [124]) ou nos modelos de sistemas magnéticos (definido como a distância em que é detectada uma flutuação no spin de um dado sítio [83]) diverge à medida que o sistema se aproxima do ponto crítico. No contexto de buscas aleatórias, podemos imaginar um comprimento de correlação como sendo a “distância” temporal em que as flutuações na energia do buscador são sentidas, ou seja, pequenas flutuações energéticas nas vizinhanças do ponto crítico num dado instante, podem ter um efeito relevante num tempo bem posterior, levando o buscador para um estado absorvente irreversível (morte) ou para um estado de sobrevivência. Como a taxa de sobrevivência depende do comportamento energético ao longo da dinâmica, além de ser a quantidade escolhida como parâmetro de ordem do sistema, é o caso aplicar os conceitos de teoria de escala e renormalização numérica para descrever o comportamento de $\Gamma(\lambda, t)$ em torno dos pontos críticos.

Com a finalidade de caracterizar o fenômeno crítico num sistema de tamanho finito (aqui sendo interpretado como ao tamanho temporal do sistema) e considerando a técnica de grupo de renormalização numérica fenomenológica¹ [95, 96], assumimos a relação de

¹Utilizada para calcular os expoentes críticos de sistemas de tamanho finito

escala [94]:

$$\Gamma(\lambda, t) = t^{-\beta/\nu_{\parallel}} f \left[t^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c) \right] \quad (4.1)$$

onde f é uma função analítica. De uma forma geral, podemos escrever a equação acima para um tempo qualquer t_0 , tal que:

$$\Gamma(\lambda, t_0) = t_0^{-\beta/\nu_{\parallel}} f \left[t_0^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c) \right] \quad (4.2)$$

Dividindo a equação 4.1 por 4.2, temos:

$$\frac{\Gamma(\lambda, t)}{\Gamma(\lambda, t_0)} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\beta/\nu_{\parallel}} \frac{f \left[t^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c) \right]}{f \left[t_0^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c) \right]} \quad (4.3)$$

Definindo a função $k(t, t_0, \lambda)$ como:

$$k(t, t_0, \lambda) = \frac{\log [\Gamma(\lambda, t)/\Gamma(\lambda, t_0)]}{\log(t/t_0)} \quad (4.4)$$

no limite em que $\lambda \rightarrow \lambda_c$, $k(t, t_0, \lambda) \rightarrow -\beta/\nu_{\parallel}$ para quaisquer pares de tempo t e t_0 , onde β e ν_{\parallel} são os expoentes críticos associados à $\Gamma(\lambda, t)$ na equação 4.1. A figura a seguir mostra esse método de renormalização para vários pares de μ_s e μ_t , fixado $t_0 = 100$ e considerando os parâmetros energéticos $\xi_0 = 100$, $\alpha = 1$ e $g = 100$. Conforme temos na

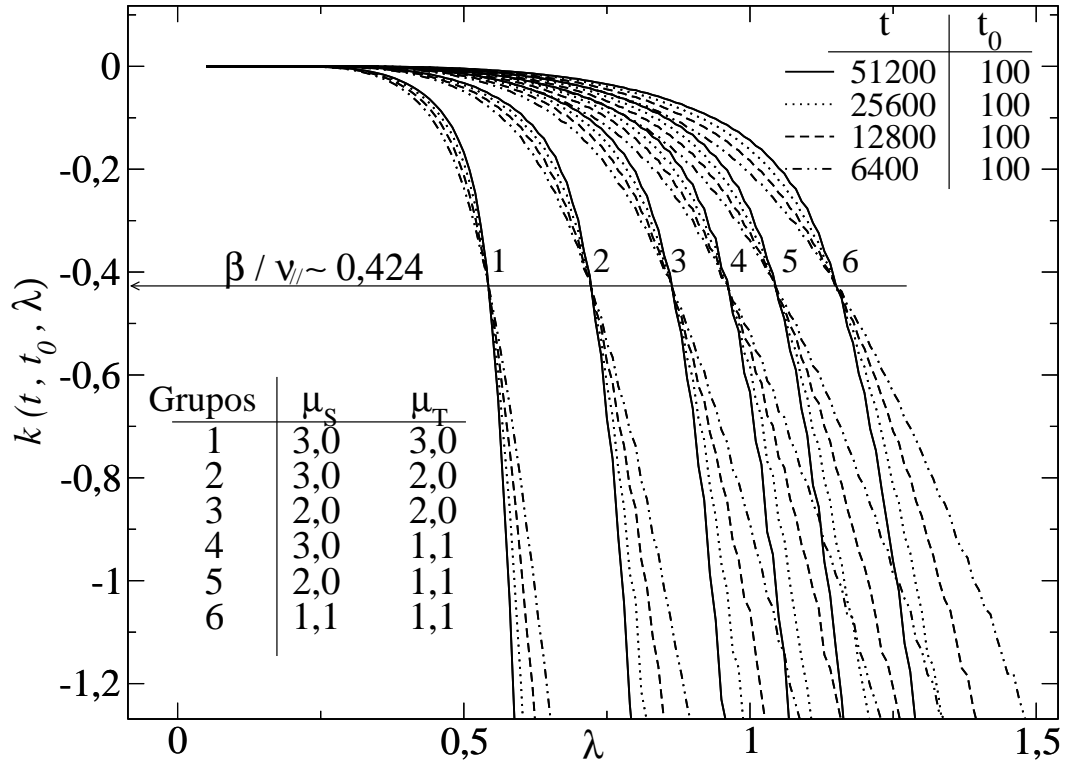


Figura 4.1: A função $k(t, t_0, \lambda)$ versus λ . Os valores de λ_c dependem de μ_s e μ_t , mas não dos pares t e t_0

figura, $\beta/\nu_{\parallel} \approx 0,424$ é o valor aproximado para qualquer que seja o par de difusão dos organismos, ou seja, para qualquer que seja a caminhada de busca escolhida. Em outras palavras, no limiar da extinção o comportamento crítico é o mesmo. A diferença entre as estratégias está justamente no ponto em que tais transições ocorrem - as densidades críticas. Assim usaremos a equação 4.1 para obter os valores dos expoentes dinâmicos que caracterizam tais transições.

4.1.1 O Expoente β/ν_{\parallel}

A figura 4.2 é um exemplo de como podemos determinar o primeiro expoente crítico β/ν_{\parallel} , onde foi usado o par $\mu_s = \mu_t = 2,0$ para ilustrar a figura maior. As demais combinações de buscas comportam-se de forma similiar e também são apresentadas.

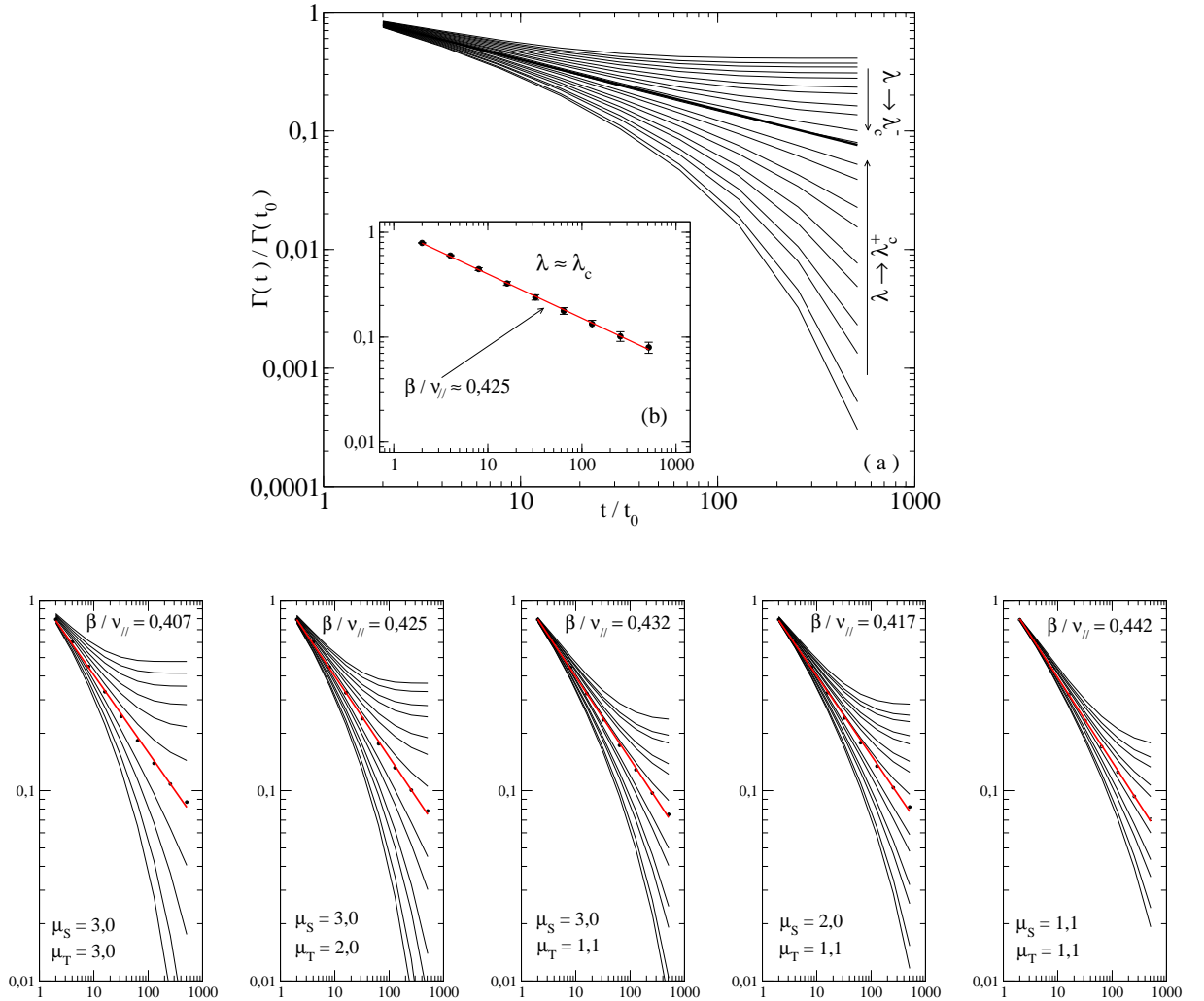


Figura 4.2: Escala log-log de $\Gamma(t)/\Gamma(t_0)$ vs. (t/t_0) para vários valores de λ , sendo $t_0 = 100$. Em (a) temos o caso $\mu_s = \mu_t = 2,0$ onde a linha vermelha mostra um “fitting” na região onde $\lambda \sim \lambda_c$, mostrando a presença de uma lei de potência com expoente dado justamente por $\beta/\nu_{\parallel} \approx 0,425$. As figuras menores mostram os valores dos expoentes para as demais combinações de busca.

A figura 4.2 mostra situações de densidades altas, baixas e em torno do ponto crítico. Conforme a equação 4.3, no ponto crítico deve existir uma dependência tipo lei de potência tal que uma reta seja formada no limite em que $\lambda \rightarrow \lambda_c$. É exatamente isso que observamos na figura, onde o coeficiente angular da reta na escala log-log fornece o valor de $\beta/\nu_{\parallel} \approx 0,424$. O valor aproximado desse expoente para algumas estratégias adotadas, pode ser visto na tabela 4.1. Outro resultado importante é o gráfico que mostra o comportamento da densidade crítica em função de μ_s quando μ_t é variado, conforme figura 4.3. Percebemos que para um dado valor μ_t , λ aumenta à medida que $\mu_s \rightarrow 1^+$, ou seja,

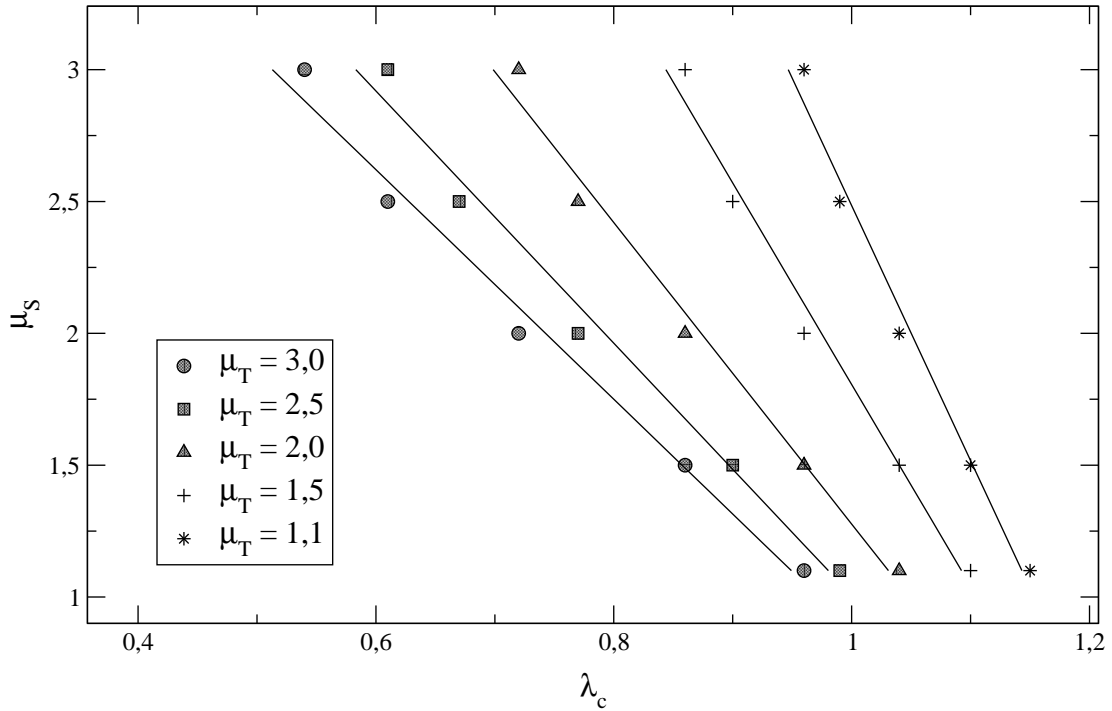


Figura 4.3: Relação aproximadamente linear μ_s vs. λ para diferentes valores de μ_t .

torna-se mais eficiente, tendo um máximo no caso $\mu_s = \mu_t = 1,1$ (otimização da busca foge do regime browniano e tende ao balístico). O interessante é que λ_c varia aproximadamente de forma linear com μ_s (μ_t) quando mantido fixo μ_t (μ_s). Assim, torna-se possível estimar (extrapolar) as densidades críticas, ou seja, os pontos críticos para quaisquer outras combinações de caminhada no intervalo $\mu_{s,t} \in (1, 3]$ (uma vez que os coeficientes angulares são obtidos numericamente). Além disso, do ponto de vista ecológico, podemos pensar que uma maneira da espécie-alvo aumentar sua sobrevivência devido à interação com uma espécie-buscador, é justamente escolher uma estratégia de busca que diminua a taxa de encontros com os predadores, que nesse caso seria a escolha por um movimento browniano. De fato, para a combinação $\mu_s = 1,1$ e $\mu_t = 3,0$ temos λ_c menor quando comparado ao caso $\mu_s = 1,1$ e $\mu_t = 1,1$. No entanto, a espécie-alvo pode ser considerada como uma espécie-predador em relação a uma outra classe de animais ou organismos, conforme rege a cadeia alimentar na natureza. Assim, o alvo precisaria de menores valores de

μ para otimizar o processo de busca por seus alvos e sobreviver nos momentos de escassez alimentar, gerando um sistema de adaptação ambiental altamente complexo para que a sobrevivência seja garantida. Observamos que usar teoria de jogos para tentar encontrar um balanço ótimo entre estas duas tendências opostas é uma interessante possibilidade de trabalho futuro.

4.1.2 Os Expoentes ν_{\parallel} e ν_{\perp}

Voltando para a equação 4.1 a fim de obter o segundo expoente $1/\nu_{\parallel}$, utilizamos a mesma metodologia aplicada ao primeiro expoente, porém com a função derivada de $\Gamma(\lambda, t)$ em relação à λ , ou seja:

$$\frac{\partial \Gamma(\lambda, t)}{\partial \lambda} = t^{(1-\beta)/\nu_{\parallel}} f' [t^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c)] \quad (4.5)$$

e para $\lambda = \lambda_c$, temos a relação de escala:

$$\log \left[\frac{\partial \Gamma(\lambda, t)/\partial \lambda}{\partial \Gamma(\lambda, t_0)/\partial \lambda} \right] = \frac{1-\beta}{\nu_{\parallel}} \log \left[\frac{t}{t_0} \right] \quad (4.6)$$

O que implica dizer que na figura de $\left[\frac{\partial \Gamma(\lambda, t)/\partial \lambda}{\partial \Gamma(\lambda, t_0)/\partial \lambda} \right]$ vs. $\left[\frac{t}{t_0} \right]$ na escala log-log, teremos $(1-\beta)/\nu_{\parallel}$ como o coeficiente angular da reta no limiar de $\lambda \approx \lambda_c$. Por outro lado, podemos também trabalhar com a função $\ln[\Gamma(\lambda, t)]$, uma vez que sua derivada tem um comportamento mais suave, de tal forma que:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln[\Gamma(\lambda, t)] = \frac{1}{\Gamma(\lambda, t)} \frac{\partial \Gamma(\lambda, t)}{\partial \lambda} = \frac{t^{(1-\beta)/\nu_{\parallel}} f' [t^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c)]}{t^{-\beta/\nu_{\parallel}} f [t^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c)]} = t^{1/\nu_{\parallel}} \frac{f' [t^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c)]}{f [t^{1/\nu_{\parallel}} (\lambda - \lambda_c)]} \quad (4.7)$$

Quando $\lambda \rightarrow \lambda_c$, definimos uma função $h(t, t_0, \lambda)$ para a relação de escala entre tempos diferentes, de forma que:

$$h(t, t_0, \lambda) = \frac{\partial \ln[\Gamma(\lambda, t)]/\partial \lambda}{\partial \ln[\Gamma(\lambda, t_0)]/\partial \lambda} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/\nu_{\parallel}} \quad (4.8)$$

Portanto, na escala logarítmica de $h(t, t_0, \lambda)$ vs. t/t_0 , devemos ter uma reta com coeficiente angular igual a $1/\nu_{\parallel}$ no regime $\lambda \rightarrow \lambda_c$. Aqui mostramos o caso onde $\mu_s = \mu_t = 2,0$ e $t_0 = 100$, conforme mostrado na figura 4.4 onde temos $1/\nu_{\parallel} \approx 0,572$. Esse valor é praticamente igual para as demais combinações de μ 's, como também podemos notar nessa figura e através da tabela 4.1.

Um terceiro expoente dinâmico ν_{\perp} surge da distância média viajada pelo buscador, ou seja, de $L(\lambda, t)$. A título de exemplo, podemos observar a figura 4.5 para analisar algumas

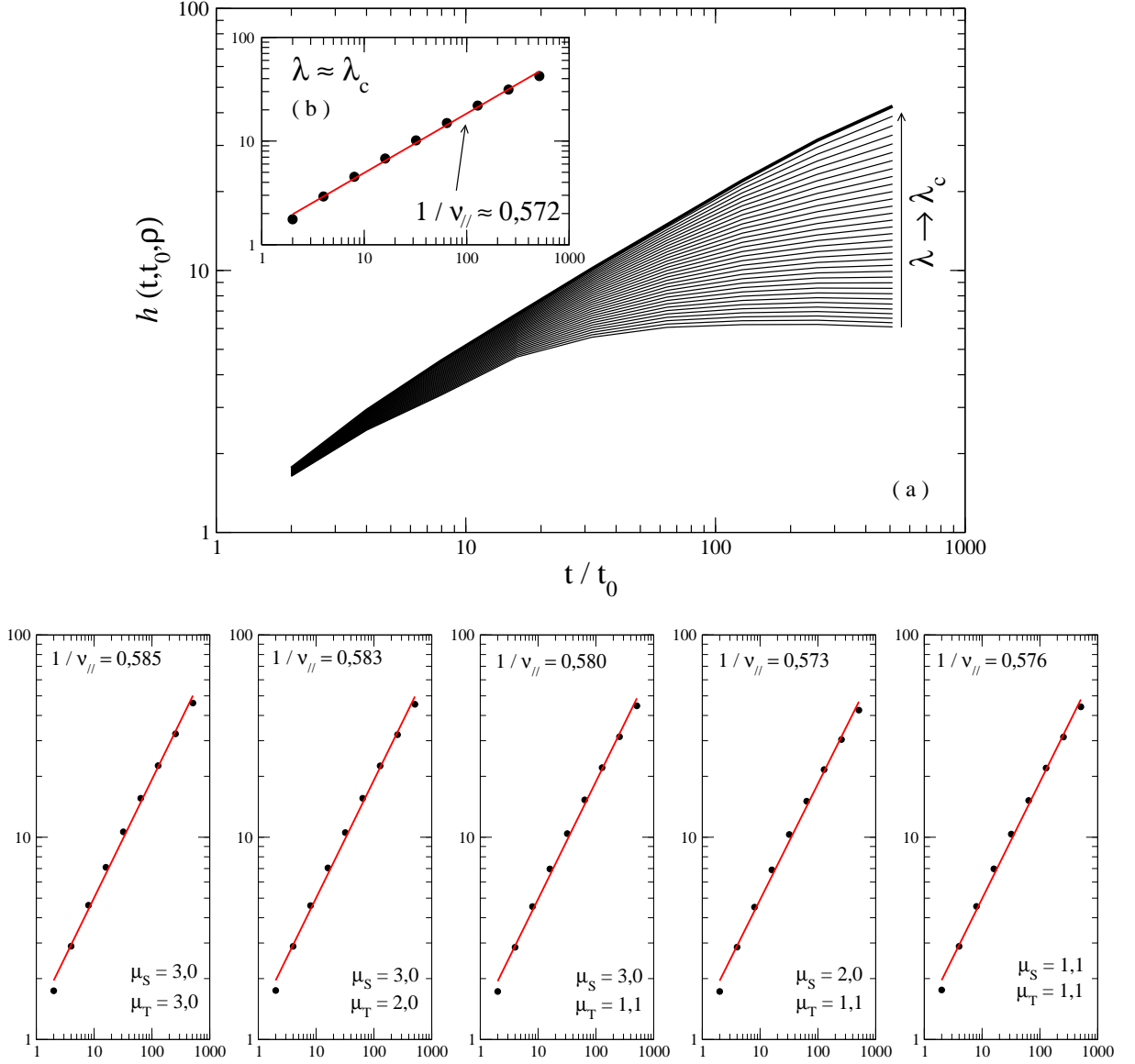


Figura 4.4: Em (a) temos a função $h(t, t_0, \lambda)$ em função de t/t_0 para vários valores de λ . À medida que $\lambda \rightarrow \lambda_c$, mais as curvas tendem a uma reta. No instante em que $\lambda \approx \lambda_c$ (b), o fitting dos pontos gera uma reta com coeficiente angular igual a $1/\nu_{||}$. Esse típico caso retrata a situação onde $\mu_s = \mu_t = 2,0$ e $t_0 = 100$. Para as demais combinações, valores similares de $1/\nu_{||}$ são obtidos, conforme visto acima.

propriedades importantes dessa quantidade, justificando-a como uma boa candidata para gerar o expoente ν_{\perp} . Na figura, $\langle L \rangle$ varia com λ para vários valores de tempo de busca no caso $\mu_s = \mu_t = 3,0$. Observamos que os valores de $\lambda < \lambda_c$ permitem o aumento de $\langle L \rangle$ conforme o tempo evolui, de fato caracterizando uma densidade alta de alvos. Por outro lado, $\lambda > \lambda_c$ leva $\langle L \rangle$ a uma constante, retratando a entrada do sistema no estado absorvente ou morte do buscador, em baixas densidades. Dessa forma, podemos associar essa distância como sendo um comprimento de correlação espacial ξ_{\perp} , que é justamente uma quantidade que permite avaliar a sensibilidade espacial do sistema. Assim, na região crítica $\lambda \sim \lambda_c$ qualquer pequena variação leva a comportamentos distintos quando $t \rightarrow$

∞ , caracterizando portanto a divergência do comprimento de correlação nesse limite. Também podemos notar que à medida que o tempo aumenta, o ponto de inflexão da curva de $L(\lambda, t)$ se aproxima cada vez mais do ponto crítico, sendo $\partial^2 L / \partial \lambda^2 \approx 0$ a condição de separação de fases. Para confirmar essa hipótese, basta verificar o comportamento de $\langle L \rangle$ em função do tempo. A figura 4.6 mostra essa situação, na qual $\langle L \rangle$ cresce na região onde $\lambda < \lambda_c$ e tende a um valor limite se $\lambda > \lambda_c$. Ainda na mesma figura, mostramos como a energia varia em função do tempo e em função de $\langle L \rangle$ para alguns valores de λ .

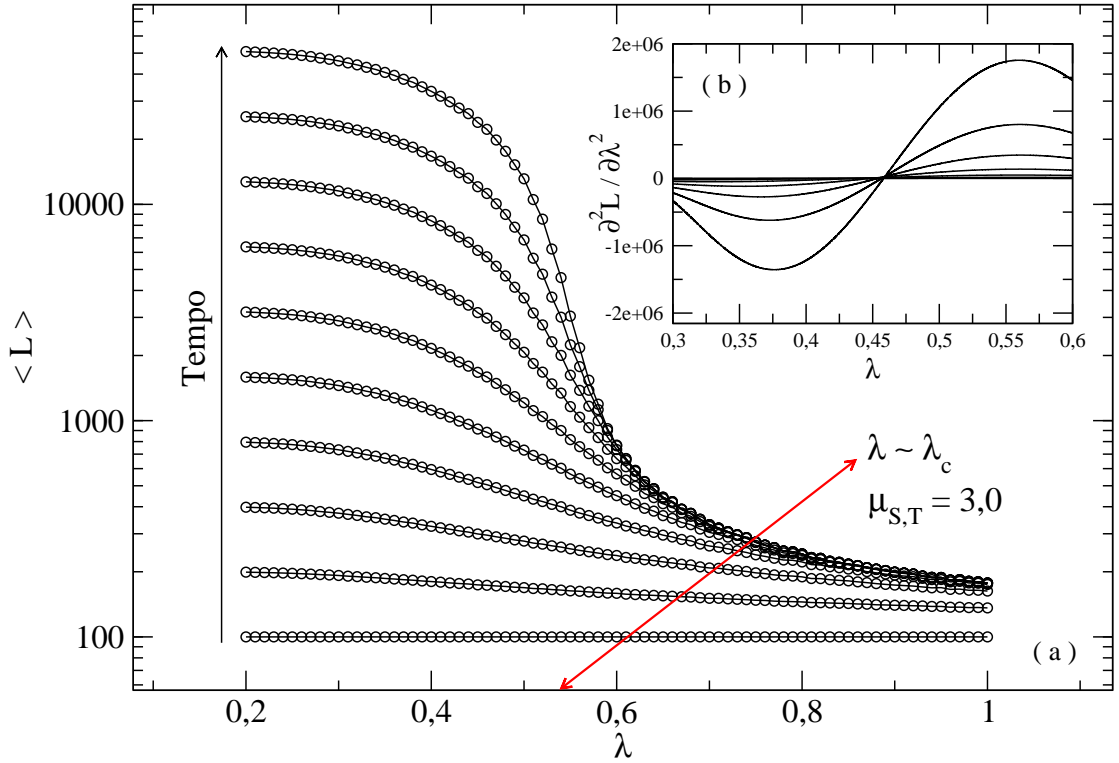


Figura 4.5: (a) Um exemplo de como se relaciona a distância percorrida $\langle L \rangle$ e a densidade de alvos λ para vários valores de t 's e $\mu_s = \mu_t = 3,0$. Em (b) temos o comportamento da derivada segunda de $\langle L \rangle$, cujo valor nulo se aproxima de λ_c quando $t \rightarrow \infty$

Considerando que a distância percorrida $\langle L(\lambda, t) \rangle$ possa ser interpretada como um comprimento de correlação espacial ξ_\perp , o qual escala com λ da forma [84, 111],

$$\xi_\perp \sim |\lambda - \lambda_c|^{-\nu_\perp} \quad (4.9)$$

então obtemos a relação de escala,

$$L(\lambda, t) = t^{\nu_\perp/\nu_\parallel} f[(\lambda - \lambda_c)t^{1/\nu_\parallel}] \quad (4.10)$$

que resulta em,

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\nu_\perp/\nu_\parallel} \quad (4.11)$$

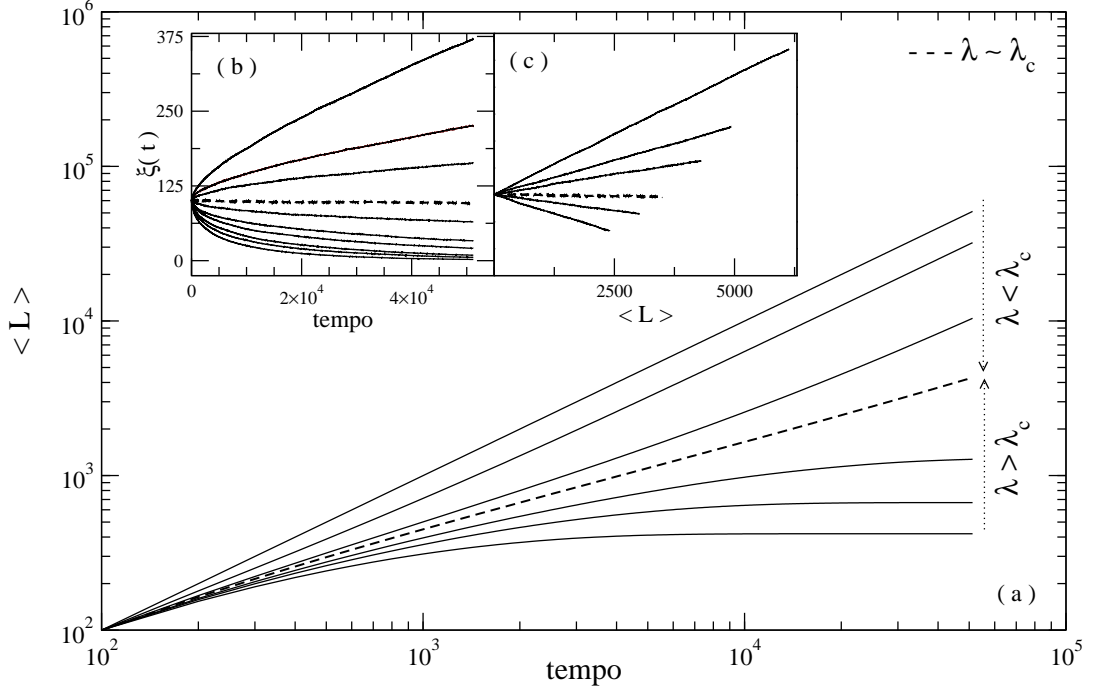


Figura 4.6: (a) A evolução da distância percorrida conforme a densidade de alvos para $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$. As figuras (b) e (c) apresentam um paralelo da dinâmica energética variando com o tempo e com a distância. No ponto crítico, a energia tende a não evoluir.

no limite em que $\lambda \rightarrow \lambda_c$, de forma análoga ao método utilizado para obter os dois primeiros expoentes. Fixando um valor L_0 e t_0 , no ponto crítico devemos ter na escala logarítmica uma reta com expoente ν_\perp/ν_\parallel conforme é variado L e t . Como já obtivemos os valores de ν_\parallel , torna-se possível determinar ν_\perp . A figura 4.8 representa algumas combinações de busca quando $\lambda \rightarrow \lambda_c$ e seus respectivos expoentes ν_\perp/ν_\parallel .

Assim como nos demais expoentes, também temos uma relativa consistência de ν_\perp/ν_\parallel com relação a todas as estratégias de caminhada. Os resultados obtidos nas figuras 4.2, 4.4 e 4.8 podem ser organizados de forma a apresentar os expoentes dinâmicos β , ν_\parallel e ν_\perp que governam as transições de fase contínuas para cada par de valores μ_s e μ_t .

Tabela 4.1: Valores críticos conforme estratégias de busca.

μ_s	μ_t	λ_c	β	ν_\parallel	ν_\perp
3,0	3,0	0,54	0,696	1,710	1,067
3,0	2,0	0,72	0,729	1,715	1,089
3,0	1,1	0,96	0,745	1,724	1,083
2,0	2,0	0,86	0,743	1,748	1,075
2,0	1,1	1,04	0,728	1,745	1,094
1,1	1,1	1,15	0,767	1,736	1,059

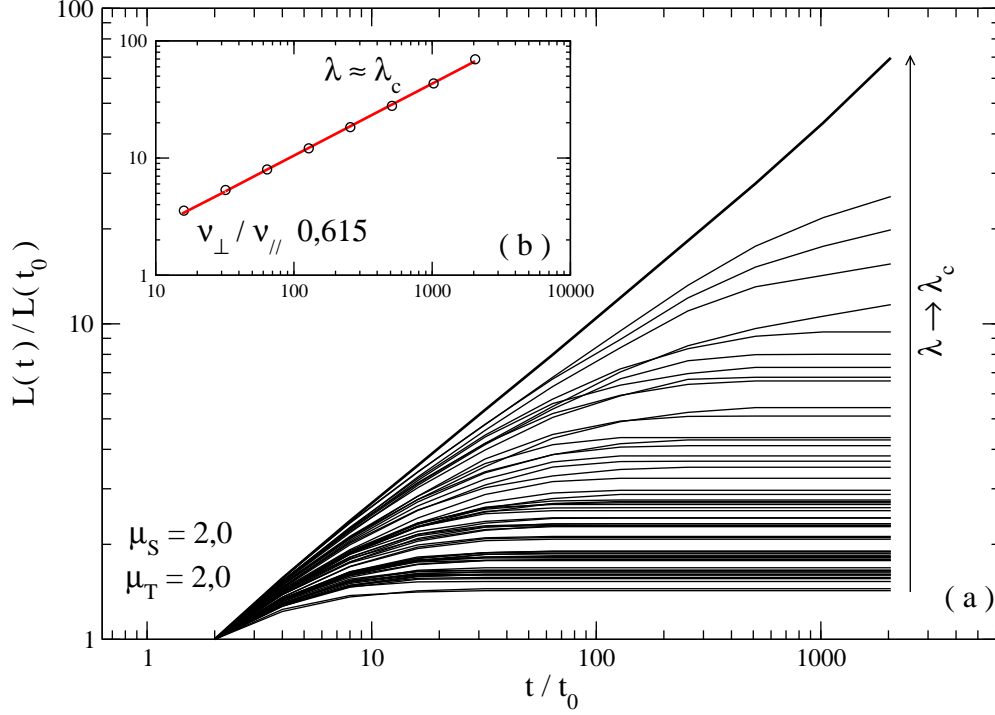


Figura 4.7: (a) Escalando $L(t)/L(t_0)$ vs. t/t_0 para diferentes densidades até o limite $\lambda \rightarrow \lambda_c$ para $\mu_s = \mu_t = 2,0$. Em $\lambda \approx \lambda_c$ determina-se o expoente $\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}$ como sendo o coeficiente angular da reta que fita os pontos em (b).

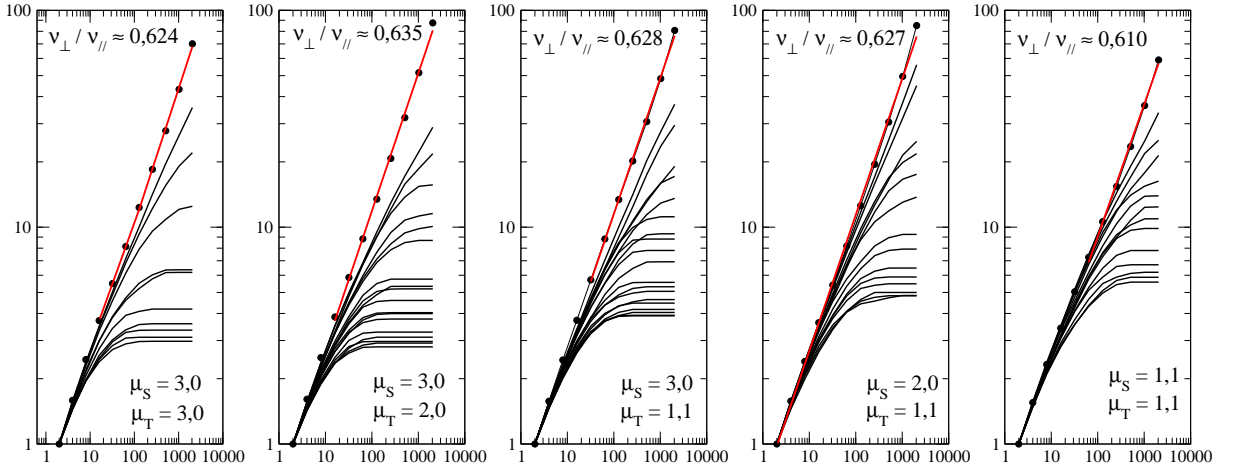


Figura 4.8: Obtendo ν_{\perp} para as demais combinações de caminhada.

4.2 Discussões Sobre os Resultados Obtidos

Os valores de densidades críticas vistos na tabela 4.1 refletem o porquê de algumas espécies mudarem seu comportamento de busca em períodos escassos de alimentos, visto que a otimização da taxa de encontros, que equivale ao aumento da probabilidade de sobrevivência, ocorre nesses regimes superdifusivos (o limite extremo sendo o caso balístico, no qual $\mu \rightarrow 1^+$). O interessante, entretanto, é que os expoentes que caracterizam a transição entre as fases de sobrevivência e extinção são bastante similares para qualquer

que seja o par μ_s e μ_t adotado, fixado os parâmetros energéticos ξ_0 , α e g . As diferenças percentuais que existem entre os dois valores mais distantes giram em torno de 9,25% para o expoente β , 2,2% para ν_{\parallel} e 3,1% para ν_{\perp} .

Uma possível explicação que justifique esses números percentuais, principalmente para o expoente β , se baseia no fato de que os cálculos numéricos são limitados a um tempo ou número máximo de passos $t_{max} = 51.200$. Esse limite temporal, inerente a sistemas finitos e restrições computacionais, pode gerar pequenas diferenças na curva de $\Gamma(\lambda, t)$ na região próxima ao ponto crítico. A maneira como Γ vai para λ_c caracteriza o expoente β e, portanto, tende a ser um processo mais sensível à medida que o tempo de busca decresce. Para que os expoentes se aproximem ainda mais de um dado valor, dentre as diferentes estratégias de busca, é necessário analisar as curvas e escalas da taxa de sobrevivência para tempos grandes, no mínimo dez vezes maior do que o utilizado nos resultados apresentados. Todavia, existe um grande limite de processamento computacional para a realização dessa tarefa, visto que cada tamanho de rede z , são realizados t passos para 10^4 buscadores sob 100 realizações para a estatística de Γ . A depender do tamanho da rede, o tempo estimado de simulação para $t \sim 50.000$ passos é de aproximadamente 120 horas já utilizando um processo simples de paralelização na simulação. Esse elevado tempo se justifica pelas constantes interações entre buscador-alvo em altas densidades, pelas constantes verificações (sítio-a-sítio) da existência de alvos e, sobretudo, pela simultaneidade dinâmica entre os organismos. Portanto, se aumentarmos esse t_{max} em 10 vezes, visando melhorar a estatística dos expoentes críticos, torna-se um tempo computacional muito longo. Em suma, essa é uma das dificuldades inerentes ao problema em questão. Trabalhos futuros, por exemplo, poderiam tentar melhorar os algoritmos para possibilitar simulações com maiores tempos de busca, assim melhorando a concordância dos expoentes críticos.

Contudo, é razoável considerar que no “limite termodinâmico”, onde $t \rightarrow \infty$, cada expoente para um dado par de combinação μ_s e μ_t , tenderiam para um valor β , ν_{\parallel} e ν_{\perp} próximos à um valor médio dos expoentes aqui obtidos, tal que $\langle \beta \rangle = 0,7346$, $\langle \nu_{\parallel} \rangle = 1,7296$ e $\langle \nu_{\perp} \rangle = 1.0778$. Um primeiro fato que justifica essa suposição é devido à alta similaridade entre as curvas de taxa de sobrevivência (figura 3.6) e renormalização numérica (figura 4.1) mesmo em tempos finitos. Partindo desse pressuposto, surge a pergunta: *os expoentes obtidos da transição de fase contínua e irreversível (sistema absorvente) nos processos de buscas aleatórias pertencem à alguma classe de universalidade conhecida?* Curiosamente, a classe de percolação direcionada com parede² abrange uma série de sistemas e modelos que apresentam transições de fase governadas pelos expoentes $\beta \approx 0.7338$, $\nu_{\parallel} \approx 1.7338$ e $\nu_{\perp} \approx 1.0969$ [109], ou seja, os valores dos expoentes críticos obtidos nos processos

²Para mais informações, o Apêndice C detalha a Teoria de Percolação, assim como a percolação direcionada usual e com parede.

de buscas aleatórias estão muito próximos da classe de universalidade DP com parede (*Directed Percolation with Wall*). Esse fato, portanto, sugere que as transições de fase até aqui apresentadas pertencem à classe DP. Motivados nessa hipótese, uma proposta de mapeamento busca aleatória \longleftrightarrow percolação direcionada é apresentada no Apêndice C, visando estabelecer a conexão entre as quantidades de ambos os modelos, bem como compreender os motivos pelos quais pertencem à mesma classe de universalidade. Porém, ressaltamos que esta análise precisa de uma verificação numérica mais detalhada, que foge do escopo da presente tese.

Um segundo fato que justifica o mesmo comportamento crítico independente do par $\mu_{s,t}$ adotado, surge da análise do número de alvos encontrados Ne versus o tempo de busca. É interessante observar que na região crítica surge um comportamento tipo lei de potência com expoentes muitos próximos quando comparados aos vários comportamentos de difusão $\mu_{s,t}$, como podemos ver na figura 4.9. Dessa maneira, concluímos que em $\lambda \approx \lambda_c$, Ne escala com o tempo na forma:

$$Ne \sim t^{0,571}, \quad \lambda \longrightarrow \lambda_c \quad (4.12)$$

onde $\alpha_{ne} \approx 0,571$ é o expoente que domina a lei de potência. É importante lembrar que λ_c é diferente para cada estratégia de busca. Por exemplo, se $\lambda = 0,54$, então estamos no ponto crítico para a situação $\mu_{s,t} = 3,0$, mas em altas densidades para $\mu_{s,t} = 1,1$. Nesse sentido, o objetivo é comparar a dinâmica de busca para várias condições das caminhadas, mas que na condição crítica acabam por apresentar várias similaridades.

Encontramos que algumas quantidades nestes processos de buscas estão fortemente conectadas. A taxa de sobrevivência $\Gamma(\lambda, t)$, por exemplo, depende da evolução energética $\xi(\lambda, t)$ após um certo tempo t , que por sua vez depende do número de encontros $Ne(\lambda, t)$. Como Ne apresenta uma invariância de escala no ponto crítico, então $\Gamma(\lambda_c, t)$ possivelmente apresenta propriedades que estejam relacionadas com essa invariância de Ne . De fato, a variância da taxa de sobrevivência proporcional ao tempo de busca, ou seja:

$$\sigma_\Gamma^2 \times t = (\langle \Gamma^2 \rangle - \langle \Gamma \rangle^2) t, \quad (4.13)$$

diverge à medida que o tempo cresce, como mostra a figura 4.10.

Como podemos ver, as flutuações na taxa de sobrevivência crescem com o tempo, de fato caracterizando uma das propriedades do parâmetro de ordem nas proximidades dos pontos críticos. Esse comportamento é mais um indício de que a dinâmica está sujeita a uma transição de fase de segunda ordem sendo a quantidade tempo o “tamanho” do sistema.

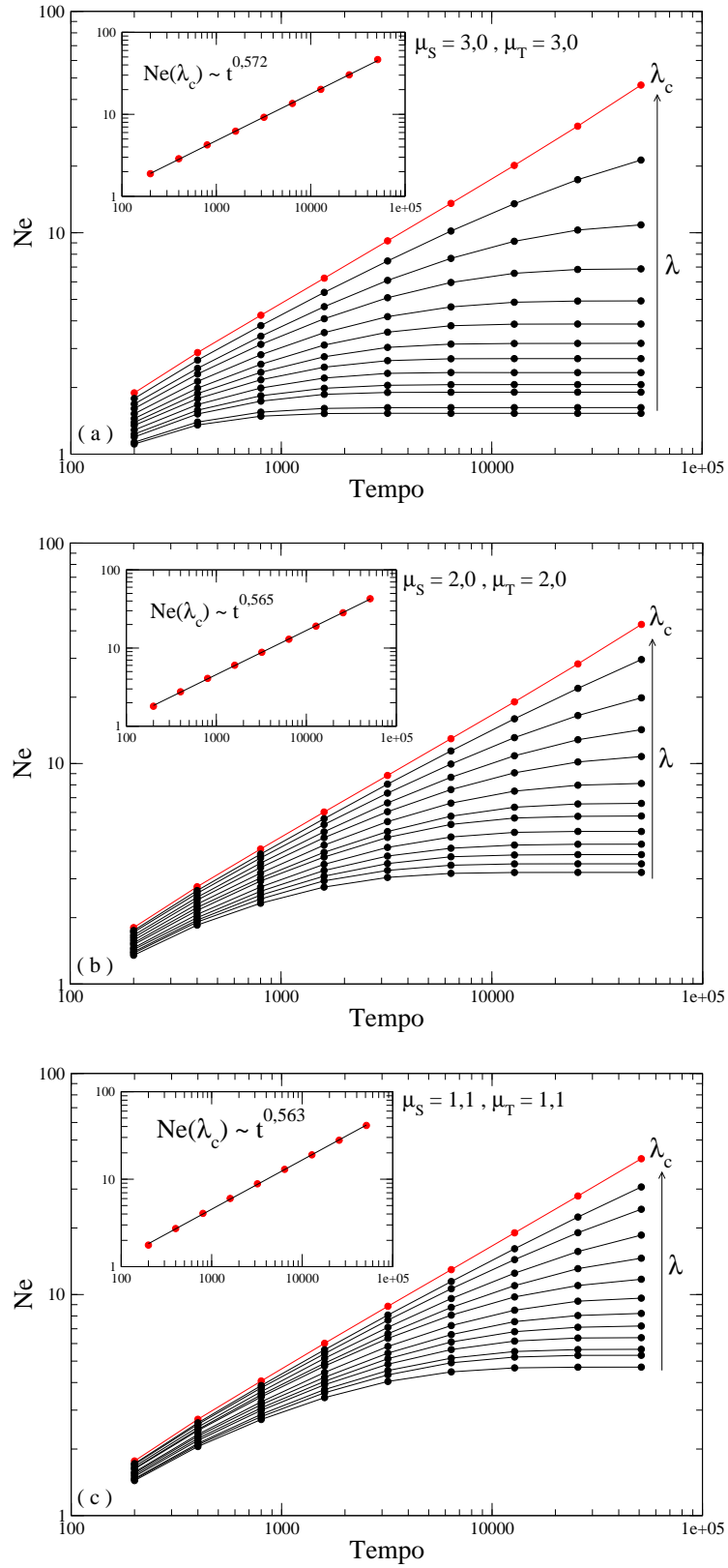


Figura 4.9: $Ne(\lambda)$ vs. t para vários valores de λ nos casos (a) $\mu_s = \mu_t = 3,0$, (b) $\mu_s = \mu_t = 2,0$ e (c) $\mu_s = \mu_t = 1,1$. Em todos os gráficos, que estão numa mesma escala, quando $\lambda \approx \lambda_c$, o comportamento de Ne é praticamente o mesmo, seguindo uma lei de potência nesse limiar.

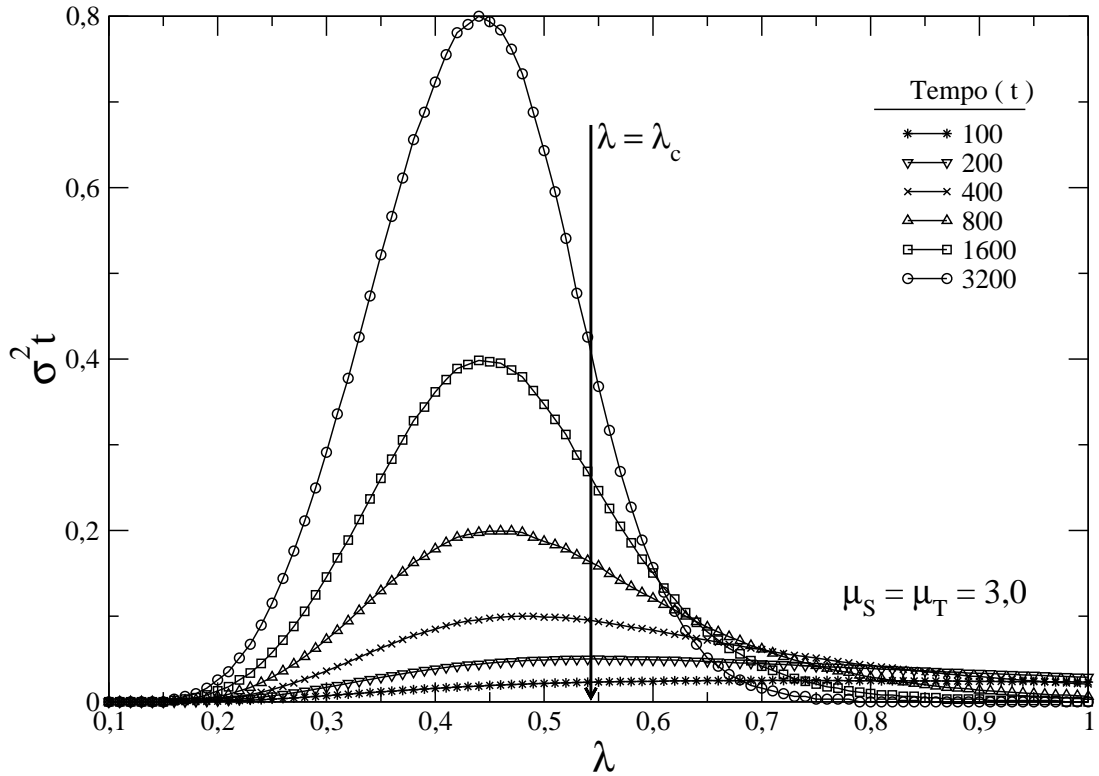


Figura 4.10: Um exemplo de como a variância da taxa de sobrevivência se comporta quando $\lambda \rightarrow \lambda_c$ para alguns tempos de busca na situação $\mu_s = \mu_t = 3,0$.

Uma ilustração interessante dessa transição pode ser vista por meio do seguinte método: considere uma rede retangular, formada por n sítios em uma das bases da rede, sendo cada sítio representado por um buscador. Para a primeira linha da rede (Linha 0 - alta densidade), que representa a simulação de busca dos n buscadores nessa linha para um tamanho de rede z muito pequeno, muito provavelmente todos os buscadores irão sobreviver após um tempo t , logo muitos sítios estarão ativados (“vivo”). Conforme z aumenta (isto é, $z + 1 =$ Linha 1, $z + 2 =$ Linha 2, ...), a dinâmica de busca tende a diminuir a probabilidade de sobrevivência, possibilitando a inatividade (“morte”) de um dado sítio em sua respectiva linha. No limite de baixíssimas densidades (Linha n , por exemplo), muitos ou todos os sítios estão inativos (espécie indo à extinção). Um esquema desta dinâmica é ilustrada na figura 4.11.

Portanto, conforme o tempo evolui, as fases onde há sobrevivência e extinção passam a ficar mais nítidas. Em $t \rightarrow \infty$, a linha que divide tais fases torna-se cada vez mais estreita em torno de $\lambda \sim \lambda_c$. A figura 4.12 mostra esse comportamento para diferentes valores de t .

Todos esses resultados levam à evidência de que processos de buscas aleatórias são fenômenos críticos caracterizados por transições de fase contínua, cujos expoentes pertencem à classe de universalidade DP. Essa conclusão, entretanto, está sujeita à pergunta:

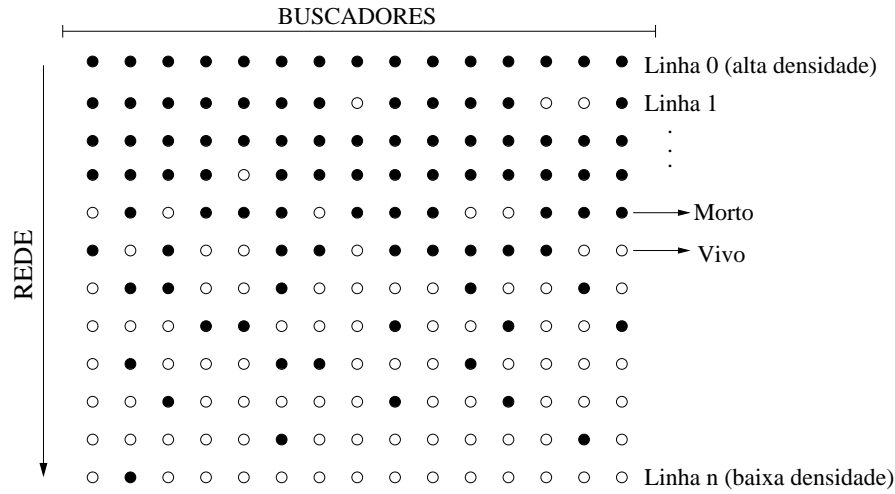


Figura 4.11: Uma alternativa de visualização da Taxa de Sobrevivência

Tais transições ainda existem ou possuem os mesmos expoentes críticos caso os parâmetros energéticos da dinâmica sejam alterados³? Pela teoria de fenômenos críticos e classes de universalidade [89, 91, 103], a mudança de detalhes no sistema (com exceção da dimensão espacial e do parâmetro de ordem) não alteram os expoentes críticos caso pertençam a uma mesma classe de universalidade. Todavia, alguns sistemas apresentam expoentes que pertencem à classes diferentes. Por exemplo, na percolação direcionada usual por ligação e sem parede, $\beta = 0,2765$. Já na percolação direcionada com parede, $\beta = 0,7338$. De maneira análoga, é possível que os parâmetros energéticos influenciam de alguma maneira em tais expoentes. Desta forma, podemos falar em classe de universalidade com relação a alguns parâmetros, e classe de classes de universalidade com relação a outros parâmetros. Esse será o tema de interesse no próximo capítulo, cujos resultados geram um entendimento mais completo das transições de fase para o problema da busca aleatória.

4.3 A Dinâmica de Busca para Alvos Estáticos

Os resultados numéricos obtidos até agora, nos remete a perguntar se os mesmos também são válidos caso os alvos tenham um comportamento estático, ou seja, sem movimento e presos em um determinado sítio ou localização da rede. Analisar essa situação torna-se também interessante porque existem muitos estudos teóricos e resultados analíticos à respeito desse tema [34, 35, 78]. Por exemplo, o cálculo da distância média percorrida até o encontro do primeiro sítio-alvo (ou seja, $\langle L \rangle(x_0)$), por um buscador que iniciou sua dinâmica na posição $r_v < x_0 < z - r_v$, é uma quantidade que pode ser analiticamente

³Lembremos que os resultados até aqui apresentados usam como parâmetros a energia inicial $\xi_0 = 100$, custo por locomoção $\alpha = 1$ e ganho por alvo encontrado $g = 100$.

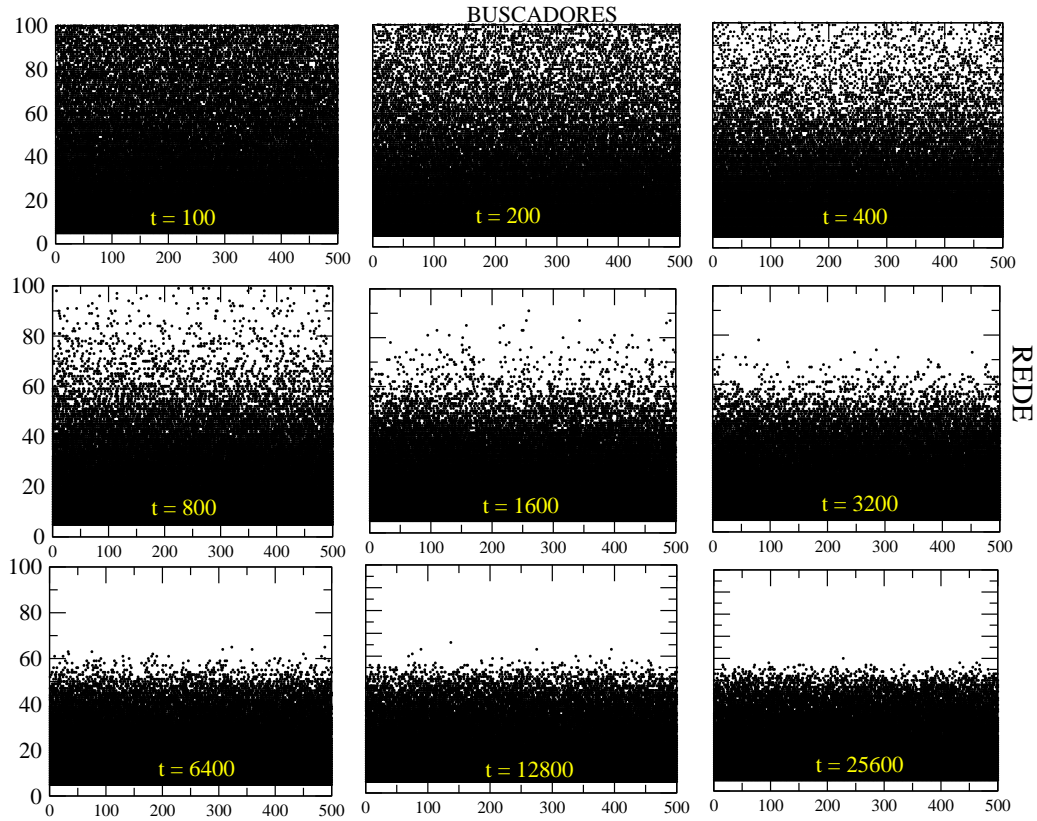


Figura 4.12: A evolução temporal da taxa de sobrevivência do ponto de vista de uma grade de sítios (cada figura representa um tempo específico de análise). O exemplo mostra 500 buscadores analisado para cada densidade λ . Os pontos pretos indicam a sobrevivência do buscador j após t . Conforme a rede aumenta, menos são os sítios ativos até o limite em que nenhum buscador sobreviver - baixíssimas densidades.

calculada através de uma aproximação similar a campo médio. Analogamente, também é possível calcular a energia líquida após um certo tempo de busca t . O mesmo não pode ser feito para alvos dinâmicos, foco desta tese, uma vez que a complexidade do sistema é muito maior quando comparado a esse caso de sítios-alvo fixos.

4.3.1 O Cálculo de $\langle L \rangle$ e $\xi(t)$

É intuitivo afirmar que o comprimento total percorrido após n passos realizados pelo buscador é dado pela equação

$$L_n = \sum_{i=1}^n |\ell_i|, \quad (4.14)$$

onde o valor $|\ell_i|$ corresponde ao comprimento do i -ésimo passo. Podemos considerar que no n -ésimo passo um dos sítios-alvo seja encontrado em $x = 0$ ou em $x = z$. Assim, o comprimento total da caminhada até esse sítio-alvo pode ser visto como uma função da posição inicial do buscador, ou seja, $L_n \equiv L_n(x_0)$. Considerando a média sobre todas as possibilidades de caminhadas que visam encontrar um sítio-alvo no n -ésimo passo, temos

que:

$$\langle L_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |\ell_i| \rangle, \quad (4.15)$$

onde n pode variar no intervalo $[1, \infty]$, ou seja, o sítio-alvo pode ser encontrado no primeiro passo em $n = 1$ ou depois de um grande número de passos. A questão chave, portanto, é definir P_n como a probabilidade de encontrar o sítio-alvo após n passos, probabilidade essa que não é uniforme e depende de n . Portanto, ao efetuarmos a média sobre todas as caminhadas possíveis, iniciando em x_0 e que encontram um dos sítios-alvo ao seu final, torna-se necessário considerar o peso estatístico associado aos encontros realizados após distintos valores de n , tal que:

$$\langle L \rangle = \sum_{i=1}^n P_n \langle L_n \rangle, \quad (4.16)$$

onde é assegurado o vínculo de normalização $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ que reflete o encontro com um sítio-alvo em $x = 0$ ou em $x = z$ no final da caminhada. Para determinar P_n é necessário definir uma função densidade de probabilidade $\rho_n(x_n)$ de encontrar o buscador entre as posições x_n e $x_n + dx_n$ após um número n de passos realizados. Logo, a probabilidade do buscador não ter encontrado um sítio-alvo após n passos é:

$$\tilde{P}_n = \int_{r_v}^{z-r_v} \rho_n(x_n) dx_n, \quad (4.17)$$

e a probabilidade (complementar) de encontrar algum sítio-alvo em algum passo $n' \geq n+1$ equivale à:

$$P_{n' \geq n+1} = 1 - \tilde{P}_n, \quad (4.18)$$

de modo que a probabilidade de um sítio-alvo ser encontrado após n passos é

$$P_n = |P_{n' \geq n+1} - P_{n' \geq n}| = |\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n-1}|, \quad (4.19)$$

onde a Eq. (4.17) passa a ser escrita como:

$$P_n = \int_{r_v}^{z-r_v} [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] dx. \quad (4.20)$$

Dessa forma P_n da Eq. (4.20) pode ser inserida na Eq. (4.16) e após manipulações matemáticas relativamente complexas (desenvolvidas por Buldyrev *et al.* [106, 107]), torna-se possível obter essa distância média viajada até o encontro de um sítio-alvo n (aqui não iremos apresentar todo o desenvolvimento, que pode ser visto nas referências originais).

O Cálculo de $\xi(t)$

Uma outra quantidade que pode ser aproximada analiticamente para a situação de alvos fixos, é justamente a energia líquida após um tempo t de busca. Ora, uma vez que a Eq. (3.3) também pode ser escrita da forma:

$$\xi_n = \xi_0 + \sum_{i=1}^n (g\delta_i - \alpha|\ell_i|) \implies \xi_{N_f} = \xi_0 + N_f g - \alpha L_{N_f} \quad (4.21)$$

onde $N_f = \sum_{i=1}^n \delta_i$ e $L_{N_f} = \sum_{i=1}^n \ell_i$ são, respectivamente, o número de alvos encontrados e o comprimento total da caminhada após n passos. Assim, podemos assumir que o número N_f de alvos encontrados após n passos é dado pela razão entre n e o número médio de passos entre dois encontros consecutivos, a qual denotamos por $\langle N_2 \rangle$, ou seja:

$$N_f \approx \frac{n}{\langle N_2 \rangle} \quad (4.22)$$

Essa é uma equação não exata, e sim aproximada, porque a cada encontro que há entre buscador e alvo, surge um novo alvo numa posição aleatória da rede diferente da posição inicial do alvo anterior que foi capturado. Como o comportamento assintótico de $\langle N_2 \rangle$ no regime de escassez de alvos ($z \gg r_v$) é dado por [10]:

$$\langle N_2 \rangle \simeq \left(\frac{z}{r_v} \right)^{\mu-1} \quad (4.23)$$

Então,

$$L = \sum_i \ell_i \approx N_f \langle \ell \rangle_t + (n - N_f) \langle \ell \rangle_{nt} \quad (4.24)$$

em que $\langle \ell \rangle_t$ ($\langle \ell \rangle_{nt}$) representa o comprimento médio de um passo simples truncado (não-truncado) ao encontrar (não encontrar) um alvo. Com alguns passos algébricos [45], encontramos:

$$(\xi_N - \xi_0)/L \approx \frac{g}{\langle \ell \rangle_t + (\langle N_2 \rangle - 1) \langle \ell \rangle_{nt}} - \alpha \quad (4.25)$$

Entretanto ainda falta incluir os efeitos de flutuações na sobrevivência das caminhadas com energia próxima a zero. Nesse caso, definimos um termo multiplicativo $\aleph(z, \mu)$ de forma a considerar tais flutuações. Assim:

$$(\xi_N - \xi_0)/L \approx \left[\frac{g}{\langle \ell \rangle_t + (\langle N_2 \rangle - 1) \langle \ell \rangle_{nt}} - \alpha \right] \aleph(z, \mu) \quad (4.26)$$

onde

$$\aleph(z, \mu) = C \left(\frac{z}{r_v} \right)^{\mu-3}, \quad \mu \leq 3 \quad e \quad C = \text{constante} \quad (4.27)$$

Em que a dependência do fator multiplicativo com expoente $\mu - 3$ implica que tais flutuações não são relevantes no regime browniano de passos curtos (quando $\mu \rightarrow 3$). Considerando que $z/2$ é um limite superior de truncamento, conforme o modelo de busca, então:

$$\langle \ell \rangle_t \approx \frac{z}{2}, \quad (4.28)$$

de forma que numa aproximação à campo médio de acordo com Viswanathan [10], temos:

$$\langle \ell \rangle_{nt} \approx \frac{\int_{r_v}^z \ell p(\ell) d\ell}{\int_{r_v}^z d\ell p(\ell)} \quad (4.29)$$

$$= \frac{r_v(\mu - 1) \left(\frac{z}{r_v} \right)^{2-\mu} - 1}{\mu - 2 \left(\frac{z}{r_v} \right)^{1-\mu} - 1} \quad (4.30)$$

Com todos esses ingredientes, obtemos uma aproximação analítica da energia líquida para alvos fixos cujo resultado é comparado com os dados numéricos de acordo com as figuras 4.13 e 4.14 a seguir, mostrando um aspecto qualitativamente compatível.

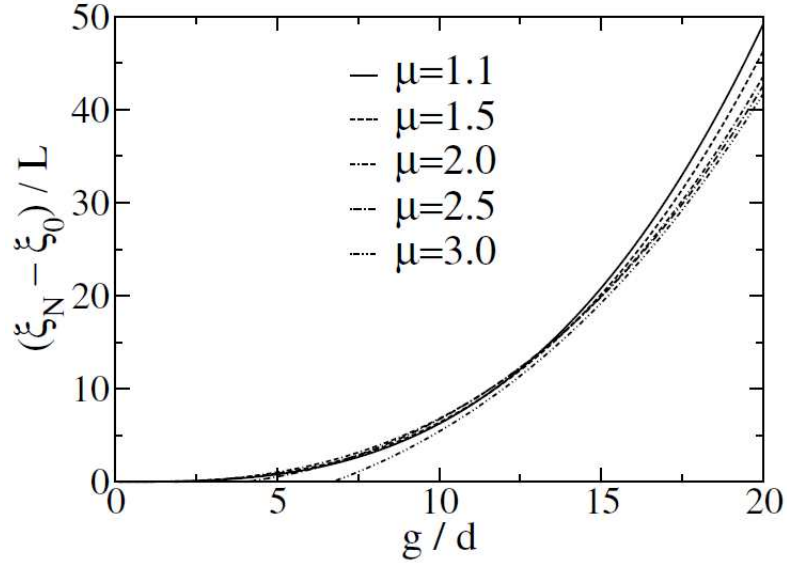


Figura 4.13: Aproximação analítica para a energia líquida considerando alvos fixos. O parâmetro de difusão μ é referente ao buscador e vai do regime browniano ($\mu = 3,0$) até o balístico ($\mu \rightarrow 1^+$). Aqui, $d = z$ (comprimento da rede) e $N = L = t$ (tempo de busca ou distância viajada). Figura retirada de [45].

De posse dos valores energéticos evoluídos no tempo e de acordo com a estratégia de caminhada do buscador, após um certo tempo t e densidade de alvos λ , é possível obter a taxa de sobrevivência na condição onde os alvos estão fixos. O objetivo, com isso, é verificar a localização da região crítica para comparar com o modelo de alvos

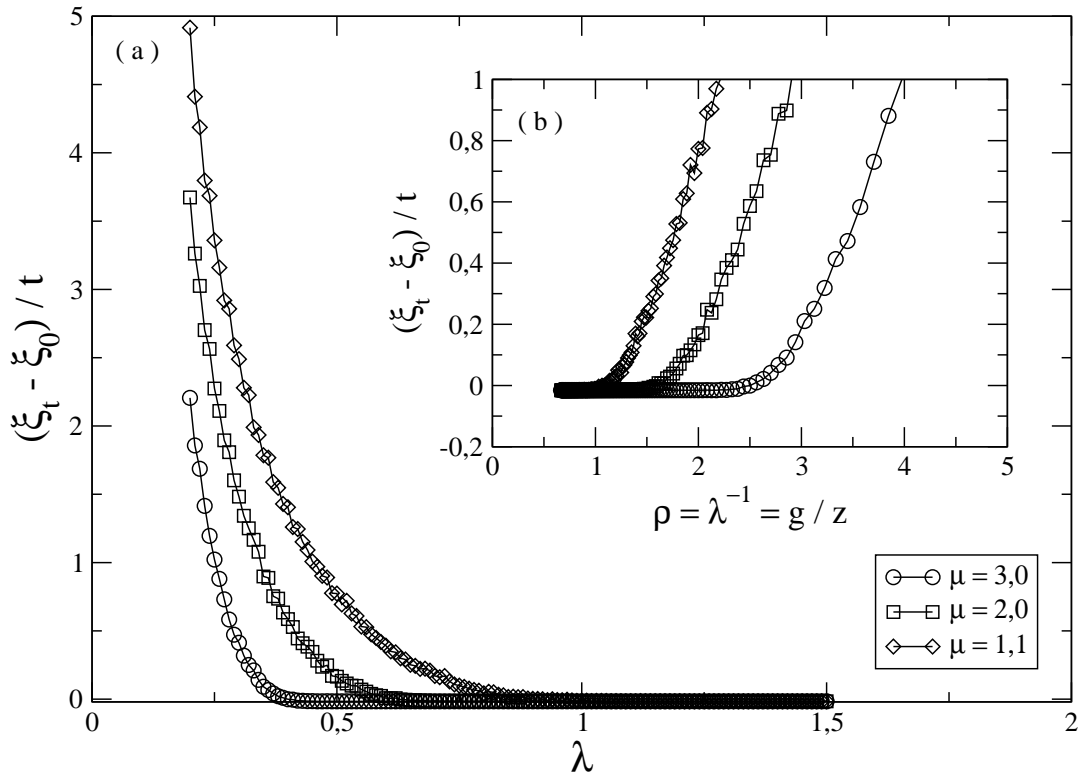


Figura 4.14: A evolução de energia do buscador ξ_t para o caso onde os alvos são estáticos e para diferentes estratégias de caminhada do buscador. Em (a) temos $\xi(t)$ versus o parâmetro de controle das transições, λ . Em (b) $\xi(t)$ versus ρ , permitindo a comparação com a figura 3.3 (alvos dinâmicos) e com a figura 4.13 (aproximação analítica para alvos fixos).

dinâmicos. Uma vez estabelecida uma curva de taxa de sobrevivência, torna-se possível estimar os valores dos expoentes críticos, em particular, averiguar o comportamento do expoente β/ν_{\parallel} presente na relação de escala (Eq. 4.1) e determinado pela Eq. (4.4), conforme vemos na figura 4.15. Como podemos notar, as regiões críticas mudam, visto que a dinâmica do alvo não mais existe e, portanto, todo o “esforço” de encontro oriunda apenas do buscador, forçando-o dessa maneira a caminhar por mais tempo (dar mais passos) e consumir mais energia para a detecção de um alvo. Entretanto e curiosamente, as curvas de renormalização mostram que as curvas respectivas de cada estratégia de busca μ , cruzam numa mesma localização em $k(t, t_0, \lambda)$, ou seja, independente da estratégia de busca, o expoente β/ν_{\parallel} é o mesmo. Além disso, esse valor também gira em torno de $\beta/\nu_{\parallel} \approx 0,42$, o que significa dizer que para esse conjunto de parâmetros energéticos adotado, a classe de universalidade dos expoentes obtidos nesse modelo, não apenas independe das estratégias de caminhada do buscador e alvo, como também independe se os alvos são estáticos ou dinâmicos, reforçando ainda mais a ideia de universalidade dos expoentes críticos das transições de fase em modelos de buscas aleatórias.

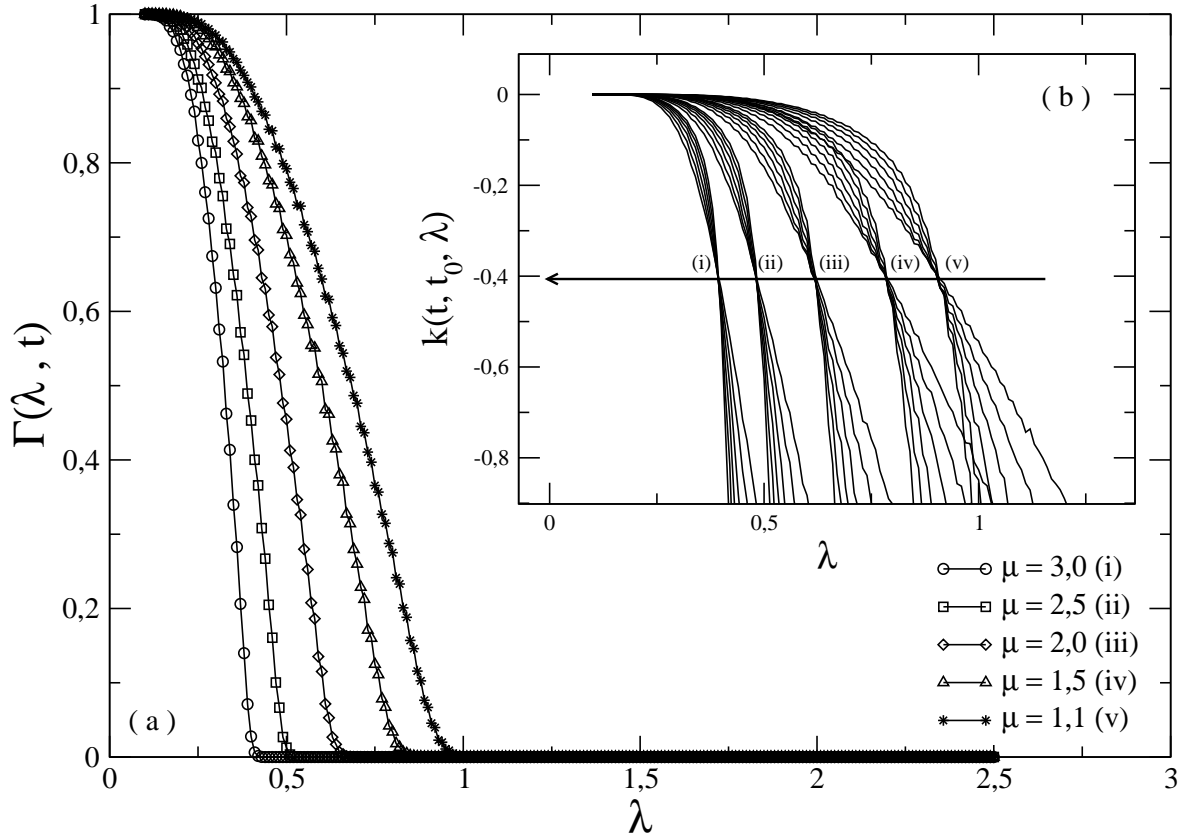


Figura 4.15: Em (a) temos a taxa de sobrevivência $\Gamma(\lambda, t)$ versus a densidade de alvos λ na rede para o modelo de alvos fixos, variando o parâmetro de busca μ do buscador durante um tempo t . Claramente notamos a eficiência da busca balística sobre a browniana, apesar dos pontos críticos estarem em regiões de menor valor λ_c quando comparados ao caso dinâmico. A função $k(t, t_0, \lambda)$ em (b), representa a renormalização numérica de forma análoga ao abordado para alvos dinâmicos. As curvas para cada valor de μ cruzam muito aproximadamente num mesmo ponto, indicando também uma universalidade dos expoentes. Além disso, tais valores são os mesmos se comparados ao modelo de alvos dinâmicos, sugerindo que os expoentes de transição independem da dinâmica ou estaticidade dos alvos.

Efeitos Estatísticos da Variação dos Parâmetros Energéticos

Como visto no capítulo anterior, modelos de busca 1D com uma dinâmica de movimento de buscadores e alvos, produzem uma transição de fase contínua entre os estágios de sobrevivência e extinção (“vida” ou “morte”) analisadas através de um apropriado parâmetro de ordem - A Taxa de Sobrevivência - e para diferentes estratégias de caminhada adotadas μ_s e μ_t . Resultados para distintos valores de μ_s e μ_t revelam um conjunto comum de expoentes críticos β , ν_{\parallel} e ν_{\perp} , sugerindo a existência de uma classe de universalidade. Porém, algumas questões fundamentais precisam ser respondidas para uma melhor compreensão das transições nesse modelo, tais como:

1. *Como a dinâmica depende de distintos valores de parâmetros energéticos do sistema?*
2. *A ordem da transição de fase pode variar conforme alguns conjuntos de parâmetros?*
3. *Variando esses parâmetros, os expoentes críticos tornam-se únicos ou apresentam diferentes classes de universalidade?*

O objetivo desse capítulo é analisar a dinâmica de dois organismos (buscador e presa) caminhando numa rede 1D quando são variados alguns parâmetros energéticos de interesse para o sistema. Os resultados que veremos nas próximas sessões mostram que o sistema produz uma transição de fase de segunda ordem com um conjunto em comum de expoentes críticos independentes das estratégias de caminhada, bem como da variação dos parâmetros ξ_0 (energia inicial), α (custo energético por passo realizado) e g (ganho energético por encontro a cada alvo), se estes variam proporcionalmente. Contudo, para algumas combinações específicas entre esses três parâmetros, o sistema segue para uma

contínua mudança nos expoentes críticos. Com a finalidade de analisar esse comportamento, associado ao parâmetro de ordem $\Gamma(z, t)$ e para alguns conjuntos de parâmetros energéticos, vamos analisar apenas os valores de β e ν_{\parallel} .

O modelo de busca segue as mesmas regras estabelecidas no Capítulo 3 desta tese e o balanço enegético de busca é governado pela equação:

$$\xi(z, t) = \xi_0 + \sum_{i=1}^t (g\delta_i - \alpha_i) \quad (5.1)$$

onde $\delta_t = 1(0)$ de acordo com o encontro (ou não) com um alvo no tempo t . Neste capítulo, por questões de simplicidade nas futuras análises, deixaremos de utilizar $\lambda = \rho^{-1} = z/g$ e passaremos a adotar como parâmetro de controle a quantidade z . Essa mudança é conveniente na interpretação dos efeitos de tamanho da rede no sistema. Antes de iniciar as análises de cada parâmetro energético, torna-se importante definir uma quantidade oriunda da relação entre ξ_0 e α . Para tanto, a figura 5.1 ajuda a compreender o comportamento da energia $\xi(t)$ quando mantido α e g , variando ξ_0 para alguns valores. Tal

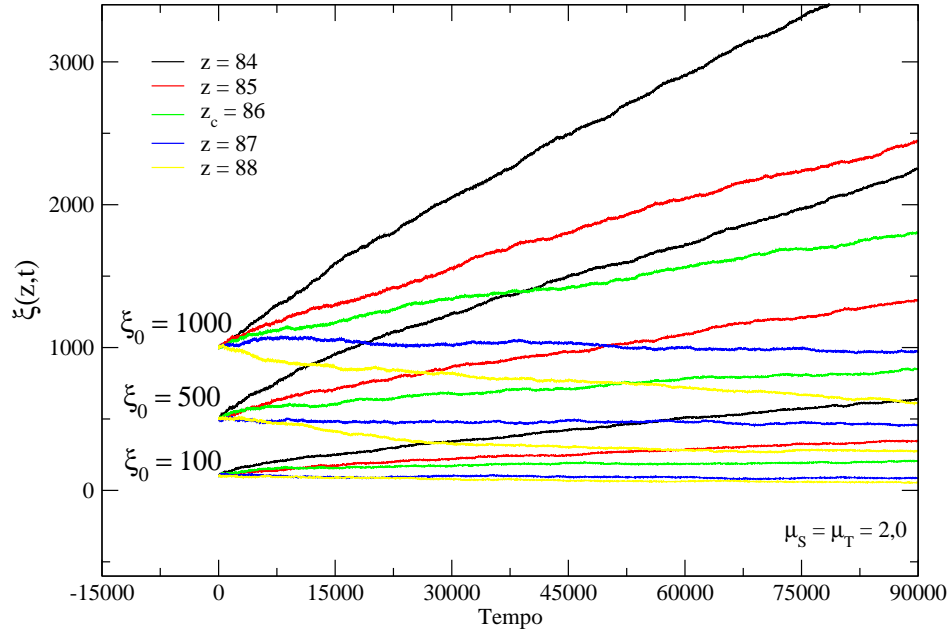


Figura 5.1: Evolução energética vs. tempo de busca para alguns valores da energia inicial ξ_0 (fixados $\alpha = 1$ e $g = 100$) num típico caso $\mu_s = \mu_t = 2, 0$. Um mesmo comportamento qualitativo é observado para outras combinações de caminhada.

como já sabemos, a energia aumenta quando o sistema é denso (alta densidade de alvos - menores valores de z) e decresce caso contrário (altos valores de z). Em particular, para um dado valor limite $z \sim 86$ (esse valor depende do par de difusão dos caminhantes, no presente contexto $\mu_s = \mu_t = 2, 0$) o ganho energético pela captura de alvo é balanceado (compensado) pelo custo de locomoção α , portanto estabilizando $\xi(t)$ em torno do seu valor inicial ξ_0 para t finito (invariavelmente, no ponto crítico o sistema vai para extinção

quando $t \rightarrow \infty$). Notamos também que, qualitativamente, o comportamento de ξ como função de z e t não muda se aumentarmos ξ_0 . Porém, observe que para um tempo $\tau \equiv \xi_0/\alpha$ temos a garantia que o buscador não irá morrer, pois mesmo sem encontrar alvos, a energia inicial é capaz de manter o processo de busca. A quantidade τ , portanto, atua como um *Tempo de Autonomia Inicial de Caminhada*. Maior τ implica que mais tempo irá se passar até que a dinâmica normal de busca estabeleça a condição de balanço energético médio do sistema. Uma vez que $t > \tau$, então o sistema busca o estado estacionário no qual a dinâmica não mais depende de ξ_0 e passa a ser guiado pelos valores de z , assim como de α e g . Entretanto, é possível que haja um número diferente de alvos detectados durante o tempo de autonomia inicial τ de maneira a interferir na taxa de sobreviventes após um tempo t . Como a taxa $\Gamma(z, t)$ é a quantidade escolhida para atuar como um parâmetro de ordem na transição, passa a ser importante analisar os efeitos causados por ξ_0 em $\Gamma(z, t)$, assunto tratado na sessão a seguir.

5.1 O Efeito da Energia Inicial ξ_0

No contexto de buscas em ambientes reais na natureza, a energia inicial ξ_0 é uma quantidade importante no sentido de garantir a sobrevivência por um período de tempo τ caso nenhum alvo seja encontrado. Nesse sentido, é fato que muitos animais possuem um metabolismo adaptado a armazenar uma considerável quantidade de energia principalmente em períodos de escassez, onde situações críticas emergem. Assim, estudar a influência de ξ_0 na taxa de sobrevivência de uma dada espécie de buscadores, surge como uma análise interessante e importante do ponto de vista de transições de fase em buscas aleatórias e suas consequências para processos concretos de comportamento de forrageamento.

Com este objetivo, vamos analisar $\Gamma(z, t)$ vs. z para alguns valores de ξ_0 e tempos t , conforme mostra a figura 5.2. Na fase ativa (sobrevivência), maiores valores de ξ_0 implicam em aumentar o tempo de sobrevivência uma vez que os buscadores podem procurar alvos por um período maior. Entretanto, em baixas densidades e tempos longos, os encontros entre o buscador e o alvo são raros de modo que a influência de ξ_0 sobre a dinâmica é reduzida, visto que os buscadores sempre morrem. Embora o ponto de transição não seja alterado (z_c não depende de ξ_0), a energia inicial ξ_0 fornece um comportamento importante para $\Gamma(z, t)$ próximo ao ponto crítico z_c (justamente onde as flutuações são mais intensas), de maneira que o aumento de ξ_0 proporciona um decaimento mais forte para $\Gamma(z, t)$, como pode ser visto em (b) da figura 5.2. Como notamos, aumentar ξ_0 e manter o custo de locomoção constante (no caso $\alpha = 1$) faz com que em densidades $z < z_c$ o buscador seja menos sensível a mortes por flutuações estatísticas, visto que em τ ocorrem muitos

encontros de modo a minimizar os efeitos de α . Entretanto, independente do valor ξ_0 , no regime $z > z_c$ o número de encontros (Ne) são poucos e a sobrevivência não é garantida após um longo tempo (conforme visto no capítulo anterior, a quantidade Ne carrega informações à respeito do comportamento da taxa de sobrevivência na região crítica).

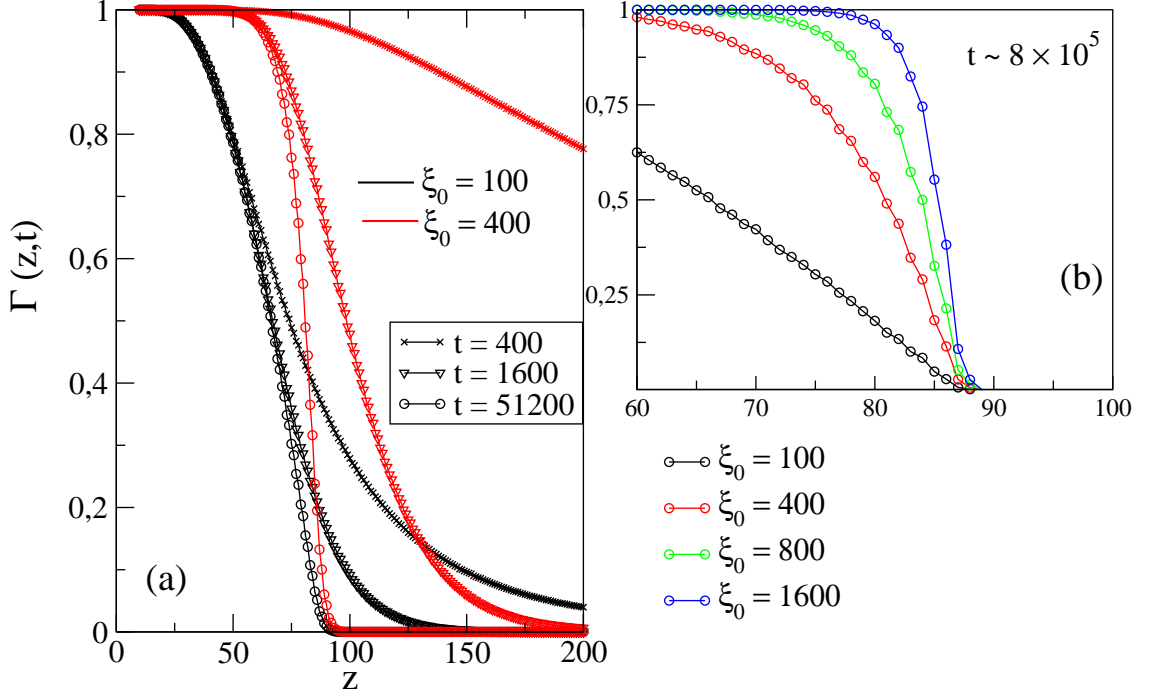


Figura 5.2: O parâmetro de ordem $\Gamma(z, t)$ vs. o comprimento de rede z para (a) dois específicos valores da energia inicial e alguns tempos de busca. Em (b) temos o comportamento de Γ para alguns valores de ξ_0 no limite de longos tempos. Todas as situações foram simuladas para o caso $\mu_s = \mu_t = 2, 0$, tomados constantes os parâmetros $\alpha = 1$ e $g = 100$.

O número de encontros na figura 5.3 resulta no comportamento da taxa de sobrevivência na figura 5.2, ou seja, aumentar ξ_0 eleva a taxa de sobrevivência nas proximidades da região crítica (note que quanto maior ξ_0 mais tempo leva para Ne tender a um plato constante). Também observamos na figura 5.2 uma diferença significativa de $\Gamma \times z$ para diferentes ξ_0 mesmo para t grande, o que acarreta um certo problema ao fazer as análises de escala na região crítica. Para contornar esse empecilho, torna-se necessário fazer um *fitting* dos pontos, isto é, uma regressão polinomial da ordem que se ajuste à curva na região crítica. Obviamente que tal problema técnico não ocorre num modelo de busca no espaço contínuo. As duas soluções são aproximadamente equivalentes, gerando mesmos expoentes críticos. Como exemplo, o conjunto de figuras 5.4 mostra a renormalização numérica de acordo com o modelo de buscas discretas (o qual vem sendo utilizado até o momento) sem o ajuste das curvas (a) e com o ajuste (b) para a situação onde $\xi_0 = 400$, $\alpha = 1$ e $g = 100$. Percebemos em (a) que o intervalo entre os pontos é grande o suficiente para fazer com que um ponto crítico efetivo pareça não estar localizado num ponto específico da rede. Isso significa que a variação de ξ_0 aumenta a sensibilidade numérica

de $\Gamma(z, t)$ com t (para tempos longos), tornando difícil encontrar os pontos críticos que efetivamente possam variar dentro do intervalo entre z e $z + 1$. Obviamente que isto leva a uma complicação ainda maior quando queremos calcular os expoentes críticos. Entretanto, ajustando os pontos nas curvas em (a), torna-se possível calcular tais expoentes, gerando os mesmo da tabela 4.1 (Uma forma alternativa de cálculo, como já comentado, é simular a dinâmica no espaço real contínuo, produzindo expoentes também de acordo com a tabela referida). Por último, devemos salientar um ponto importante: aumentar ξ_0 significa aumentar o tempo de autonomia inicial de busca τ . Assim ξ_0 alto leva a um segundo problema de análise, no qual os regimes assintóticos exigiriam tempos computacionais ainda maiores. Nosso procedimento acima descreve uma maneira de burlar estes procedimentos numéricos.

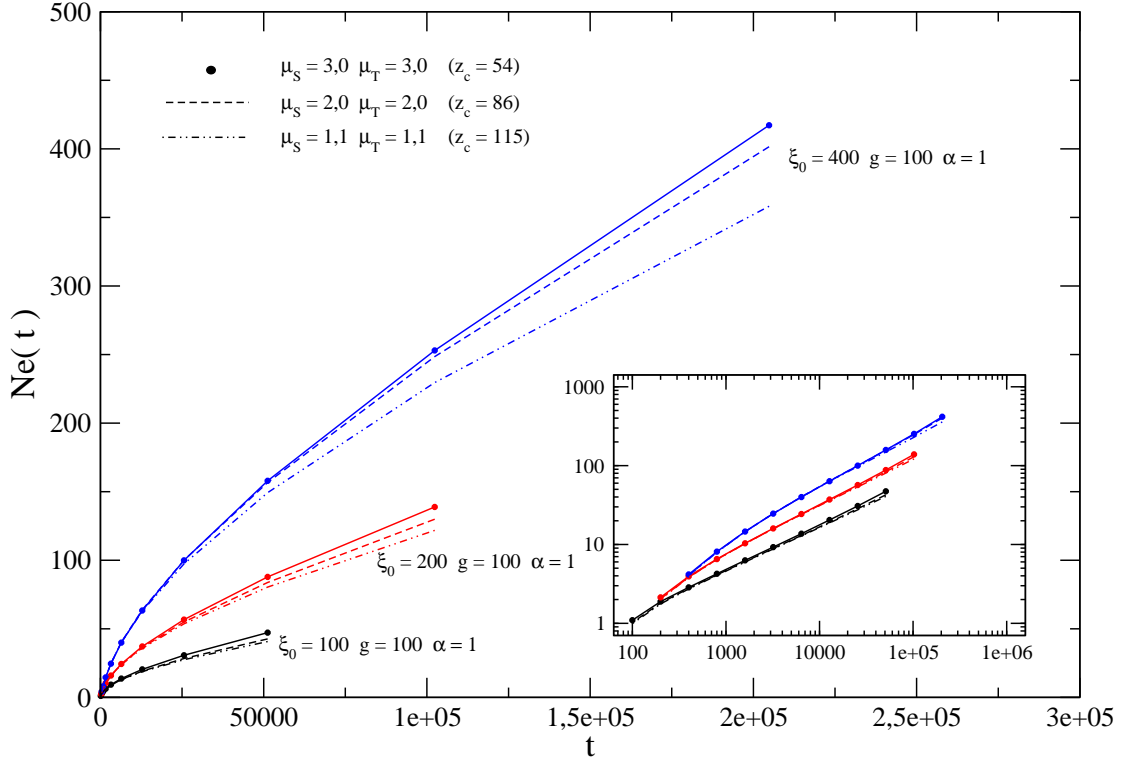


Figura 5.3: O número de encontros Ne variando com o tempo para algumas combinações de $\mu_{s,t}$ em seus respectivos valores críticos. A variação das cores indica a mudança de ξ mantidos α e g constantes.

Para ilustrar o fato mencionado acima, a figura 5.6 apresenta uma situação extrema de um valor inicial ξ_0 muito grande e tempo de busca t . Nestas configurações, qualquer variação do parâmetro de controle z (em 1 unidade), o sistema parece ir para uma fase ou outra de forma abrupta, consequência da sensibilidade numérica mencionada nas proximidades da região crítica. Por outro lado, a variação não discretizada de z possibilita a caracterização da transição que divide as duas fases (sobrevivência e extinção) mesmo em situações extremas. Entretanto, este comportamento para o caso discreto é

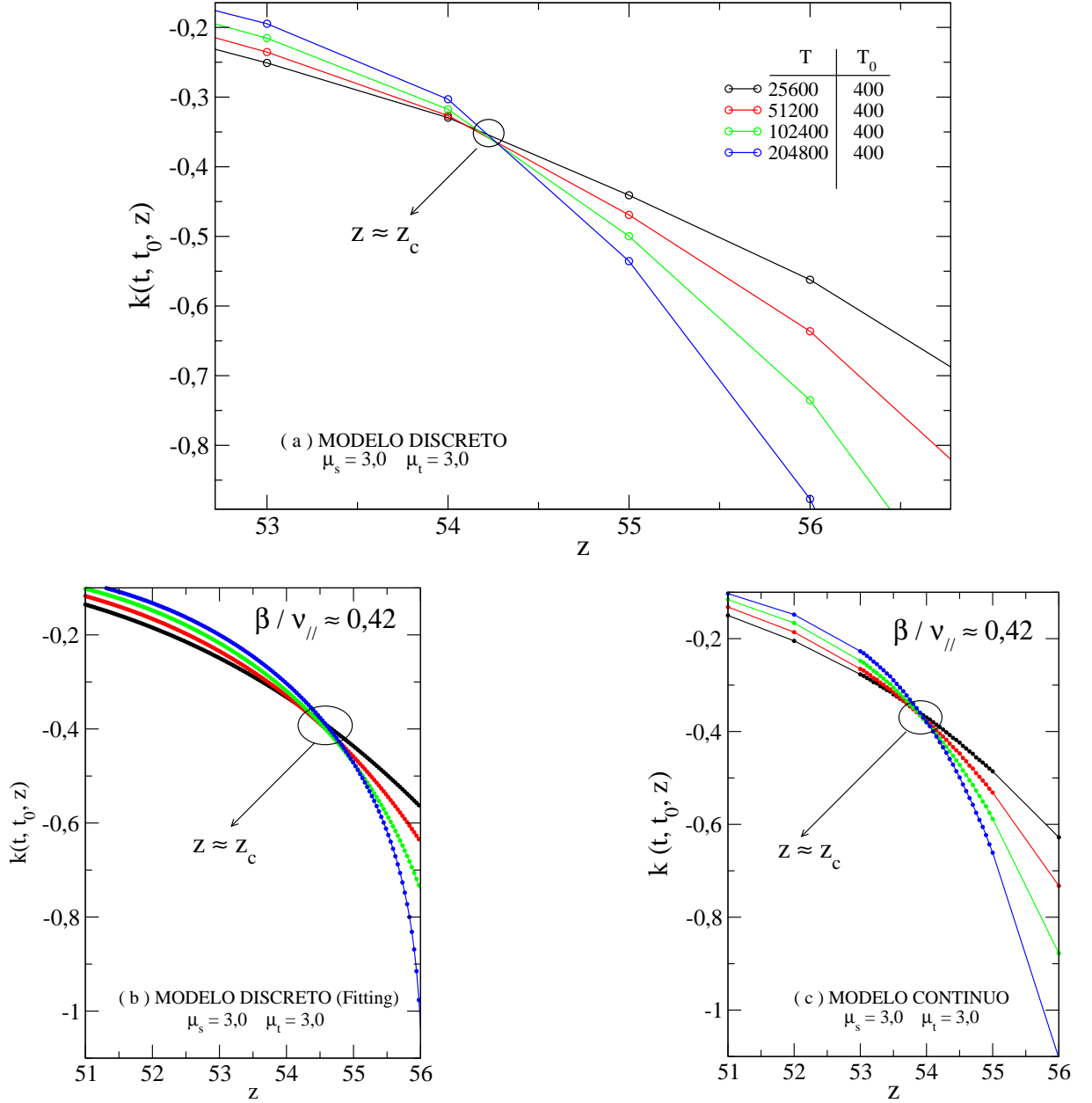


Figura 5.4: Aumentando a energia inicial para $\xi_0 = 400$ e mantendo fixo $\alpha = 1$ e $g = 100$ (aqui $\mu_s = 3,0$ e $\mu_t = 3,0$), ou seja, aumentando o tempo de autonomia inicial da busca, vemos que a região de localização do ponto crítico z_c não coincide com um ponto da rede no modelo de buscas discretas (a), podendo ocupar valores intermediários num comprimento $z < z_c < z + 1$. Porém no modelo de buscas contínuas (c), a localização de z_c torna-se muito mais precisa. Em (b) temos uma solução que fornece uma estimativa do valor z_c em redes discretas, onde a curva original passou por um processo de regressão polinomial de ordem a se ajustar com os dados. Tais resultados são similares para as demais combinações μ_s e μ_t .

uma consequência dos valores dos parâmetros e não resulta na mudança da ordem da transição. Basicamente, a condição para que o modelo de buscas discretas possam caracterizar fenômenos críticos, se resume em fazer $t_{max} \gg \tau$ e que o comportamento dinâmico do parâmetro de ordem não sofra significativas variações entre os comprimento de rede.

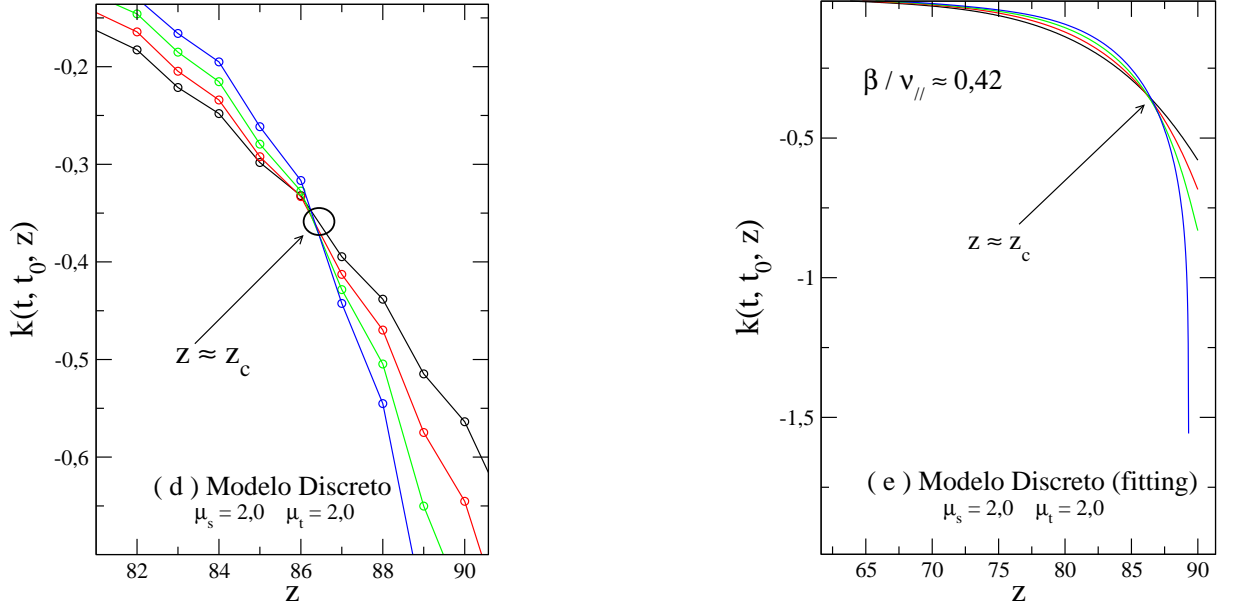


Figura 5.5: Similar à figura 5.4, porém considerando $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$. Em (d) o modelo discreto e em (e) o modelo discreto ajustado (fitting).

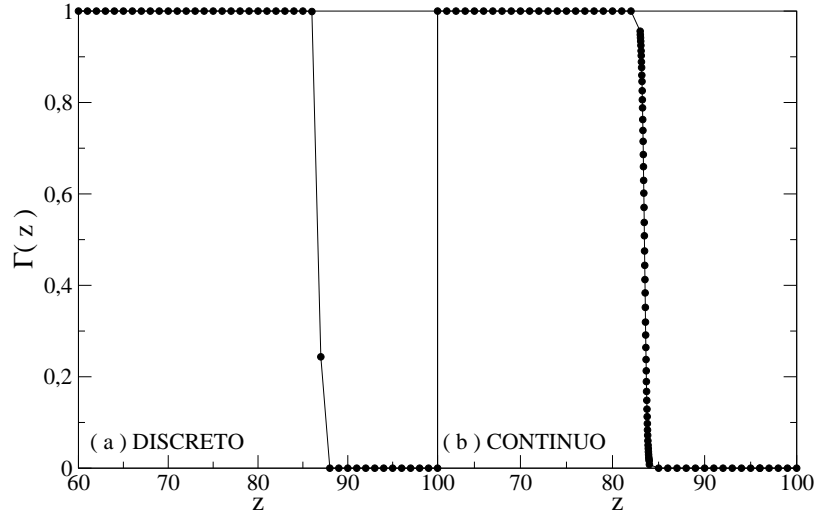


Figura 5.6: No limite em que $\xi_0 = 25.600$ e para um tempo de simulação 10^7 , o modelo de busca discreta perde informações sobre as quantidades medidas em torno de ponto crítico. O mesmo não ocorre para o modelo contínuo, onde a redes de comprimento fracionário garantem a caracterização do ponto crítico que divide as fases do sistema. Aqui, $\alpha = 1$, $g = 100$, $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$.

As discussões acima indicam que o aumento de τ naturalmente cria dificuldades para se encontrar o ponto crítico. Tal dificuldade é maior quando z é variado discretamente ao invés de continuamente (como podemos ver na figura 5.6). A partir destas observações, podemos nos perguntar: *O modelo de buscas aleatórias no espaço contínuo é mais adequado para a caracterização de transições de fases?* Podemos responder dizendo que espaços discretos podem se aproximar de espaços contínuos conforme as escalas, ou seja, à medida que o tamanho total da rede pelo parâmetro de rede cresce. Neste caso, o comportamento

será similar tanto no aspecto qualitativo quanto no quantitativo. Portanto, o fator que dita se redes discretas podem ser usadas para simular o caso real contínuo de busca por alimentos é o conjunto específico de valores dos parâmetros utilizados. Na situação onde a energia inicial ξ_0 é grande comparada ao custo energético α , ou seja, elevado valor de τ , ou no caso onde o custo energético por passo cresce no limite que o ganho g permanece constante (como veremos a seguir), o modelo contínuo mostra ser melhor para identificação e caracterização dos pontos críticos. Assim, a análise de transição de fase é melhor caracterizada em modelos de buscas no espaço contínuo. Entretanto, nesta tese optamos pelo estudo (em 1D) de redes discretas, por sua simplicidade de implementação. Além disso, em um certo sentido, fenômenos críticos no caso discreto apresentam uma riqueza até maior do que o caso contínuo.

5.2 A Variação Proporcional dos Parâmetros Energéticos

Aqui nós apresentamos o caso em que a variação dos parâmetros energéticos se faz de forma proporcional, ou seja, os parâmetros variam de forma a permanecer constante o tempo de autonomia inicial da caminhada $\tau = \xi_0/\alpha$, bem como a razão entre o ganho de energia por alvo e o custo energético por passo g/α . Para analisar os efeitos deste tipo de variação de parâmetros de energia, simulamos o comportamento energético para um dado buscador (em uma única realização) nas regiões de densidade crítica (figura 5.7) e de alta densidade (figura 5.8). Apenas para esta única realização, supomos 3 cenários diferentes de balanço energético em cada evento de encontro.

Conforme vemos nas figuras 5.7 e 5.8, a variação proporcional dos parâmetros energéticos translada proporcionalmente a evolução de energia $\xi(t)$. Desta maneira, quanto maior for a variação positiva dos parâmetros ξ_0 , g e α , mais altos são os estados de energia ocupados pelo buscador. Basicamente a diferença entre um conjunto e outro é a velocidade de perda energética por passo e o ganho energético por alvo capturado, de forma que o comportamento qualitativo não é alterado (isto é mostrado de forma clara na figura 5.9, onde o número de encontros com alvos praticamente não é alterado se mudarmos proporcionalmente os parâmetros). Quantitativamente apenas há mudança nos estados de energia do sistema (devido justamente à variação em tais parâmetros). Como os pontos críticos estão localizados na região onde não há crescimento ou decaimento da energia média de busca ao longo de um tempo t , então $\xi(t)$ tende a permanecer uma constante em torno de ξ_0 na região crítica (como podemos ver na figura 5.10). Além disso, a distribuição de energia na região crítica (figura 5.11) apenas reescala quando variamos os parâmetros energéticos, de modo que o direcionamento do sistema à fase de extinção ou sobrevivência

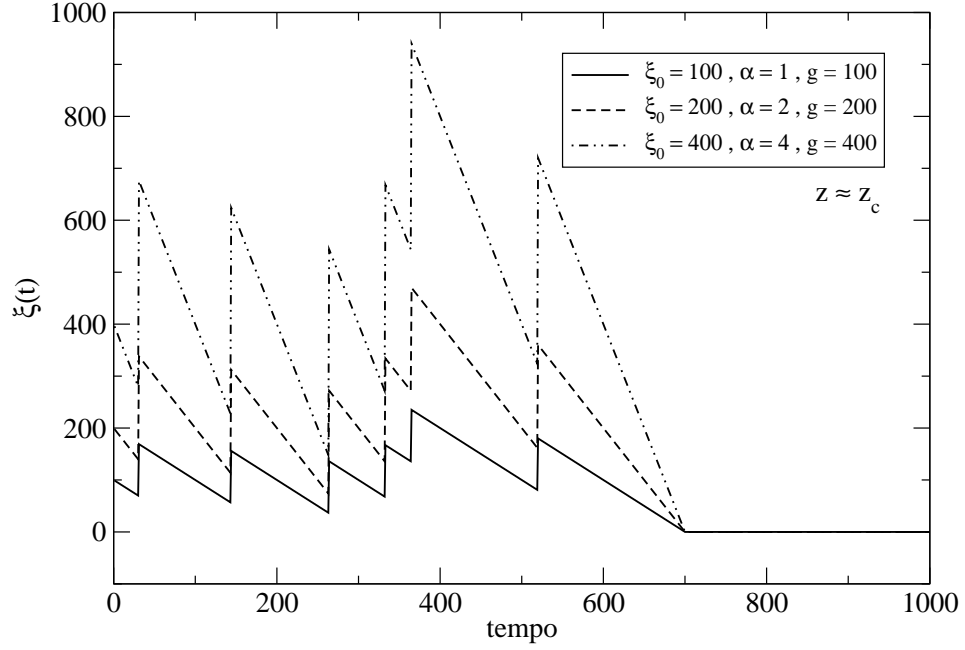


Figura 5.7: A evolução da energia com o tempo para um dado buscador. As três curvas são para uma mesma dinâmica de busca, apenas supondo que em cada evento de encontro o ganho é de $g = 100$, $g = 200$ e $g = 400$ unidades de energia. Também temos respectivamente $(\xi_0 = 100, \alpha = 1)$, $(\xi_0 = 200, \alpha = 2)$ e $(\xi_0 = 400, \alpha = 4)$. Aqui $z \approx z_c$ e $\mu_s = \mu_t = 2, 0$.

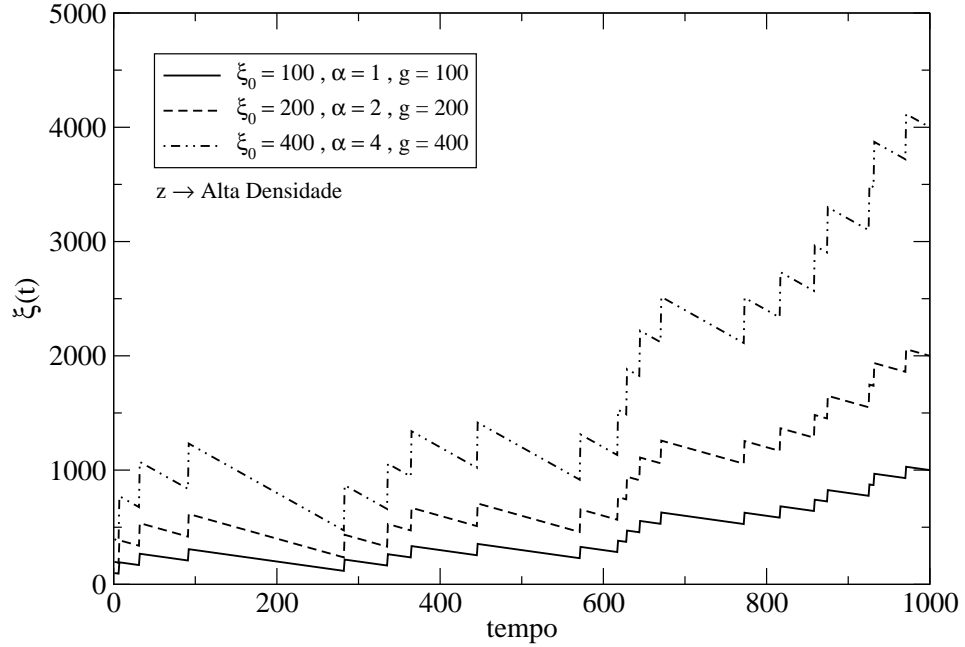


Figura 5.8: Mesmas condições que a figura 5.7 mas em altas densidades.

é preservado, portanto mantendo as características gerais do parâmetro de ordem $\Gamma(z, t)$, da localização do ponto crítico z_c e, conseqüentemente, da transição de fase.

Estes resultados indicam que o comportamento de transição de fase não é alterado quando variamos proporcionalmente os parâmetros energéticos. De fato, os expoentes

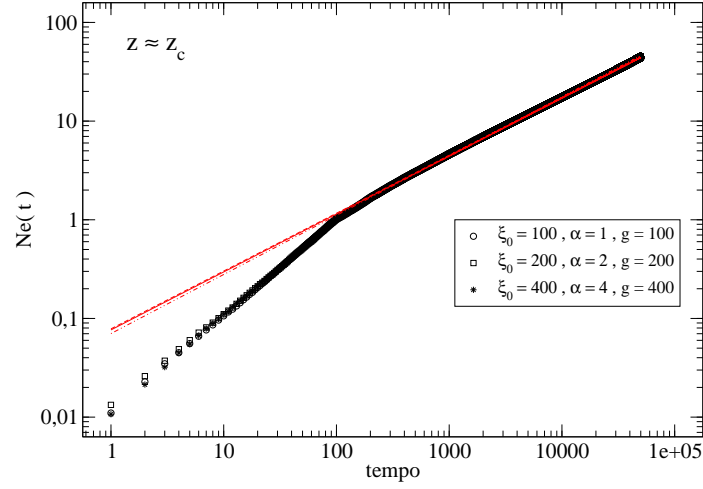


Figura 5.9: O número de alvos encontrado $N_e(t)$ em função do tempo de busca para algumas variações proporcionais dos parâmetros energéticos na região crítica, com $\mu_s = \mu_t = 2,0$. O comportamento de N_e é muito similar para qualquer variação proporcional adotada.

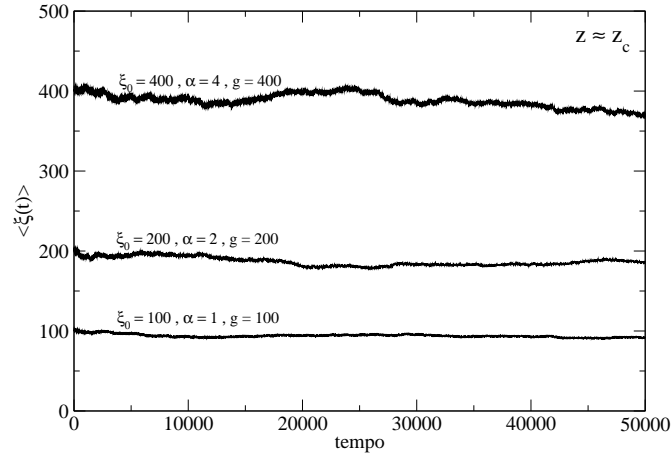


Figura 5.10: A energia média evoluindo com o tempo t . O mesmo comportamento qualitativo num específico tamanho de rede z_c mostra que a localização dos pontos críticos é a mesma, independente do par μ_s e μ_t adotados. O aumento dos parâmetros energéticos apenas translada a curva de energia, mantendo as demais características do sistema. Aqui temos $\mu_s = \mu_t = 2,0$.

calculados para alguns conjuntos de parâmetros (conforme vemos na tabela 5.1) confirmam a robustez da universalidade dos expoentes críticos ($\beta/\nu_{\parallel} \approx 0,42$ e $1/\nu_{\parallel} \approx 0,57$) para várias estratégias de buscas e para as condições de variações de parâmetros energéticos discutidas nesta seção.

5.3 O Efeito do Custo Energético α

Como visto anteriormente, variações proporcionais de todos os parâmetros energéticos não alteram as características das transições de fase. Porém, como vamos discutir a partir de agora, mudanças em separado dos mesmos, acarretam mudanças qualitativas impor-

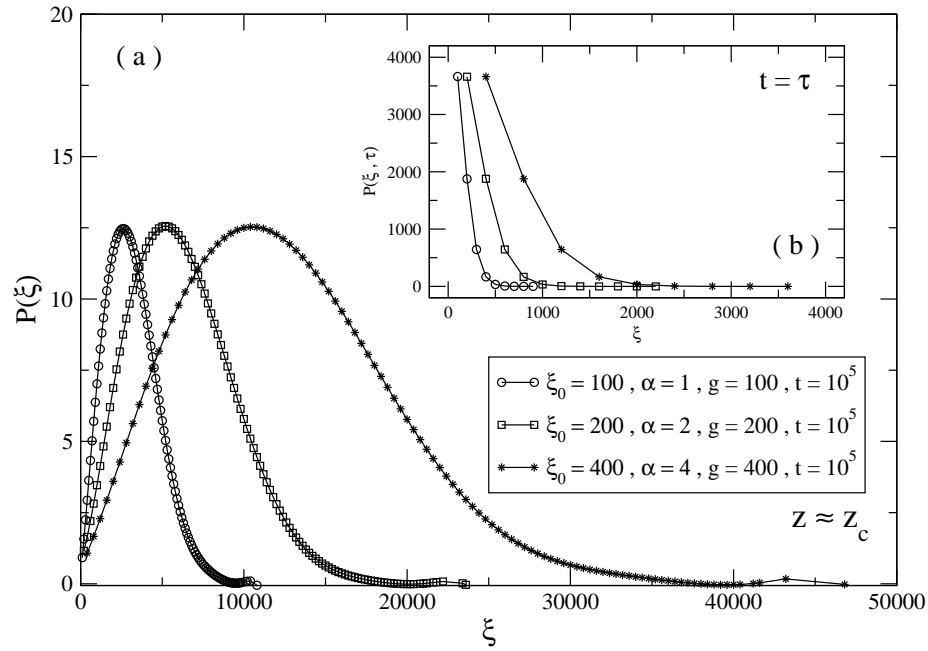


Figura 5.11: Em (a) temos as distribuições de energia na densidade crítica depois de um tempo longo de busca 10^5 para alguns conjuntos de parâmetros energéticos variados proporcionalmente. Já em (b) temos tais distribuições no final do tempo de autonomia τ . Nesta figura, $\mu_s = \mu_t = 2,0$. Resultados similares são obtidos para as demais combinações de caminhada.

μ_S	μ_T	z_c	β	$\nu_{ }$
$\xi_0 = 100, \alpha = 1, g = 100$				
3,0	3,0	54	0,6961	1,7104
3,0	2,0	72	0,7292	1,7152
2,0	2,0	86	0,7454	1,7243
3,0	1,1	96	0,7431	1,7481
2,0	1,1	104	0,7282	1,7450
1,1	1,1	115	0,7675	1,7363

μ_S	μ_T	z_c	β	$\nu_{ }$
$\xi_0 = 200, \alpha = 2, g = 200$				
3,0	3,0	54	0,7197	1,7663
3,0	2,0	72	0,7448	1,7592
2,0	2,0	86	0,7422	1,7640
3,0	1,1	96	0,7563	1,7551
2,0	1,1	104	0,7391	1,7650
1,1	1,1	116	0,7724	1,7506

μ_S	μ_T	z_c	β	$\nu_{ }$
$\xi_0 = 400, \alpha = 4, g = 400$				
3,0	3,0	54	0,7213	1,7769
3,0	2,0	72	0,7455	1,7548
2,0	2,0	87	0,7417	1,7609
3,0	1,1	97	0,7585	1,7532
2,0	1,1	105	0,7349	1,7631
1,1	1,1	116	0,7715	1,7481

Tabela 5.1: O efeito da variação proporcional dos parâmetros energéticos nos expoentes críticos. Nesse caso, nenhuma mudança significativa é observada nos expoentes, independente do conjunto de parâmetros ou das estratégias de busca.

tantes. A maneira pela qual a energia é consumida ao longo do tempo ou da dinâmica de movimento, também representa um fator importante e determinante para a sobrevivência em determinadas condições. O ideal para diferentes espécies animais é seguir

comportamentos com gastos menores (α pequeno) e ganhos maiores (g grande). Fixados os parâmetros energéticos de ganho e o tamanho da rede, temos que as características de α tornam-se relevantes para o direcionamento do sistema à sobrevivência ou extinção. Para analisar este efeito, vamos manter o tempo inicial de autonomia τ , ou seja, fazer ξ_0 mudar proporcionalmente com α , e fixar o ganho por alvo g (uma vez que esse parâmetro não está sendo analisado aqui). Este procedimento garante que os resultados serão pouco afetados por τ e por g .

Em primeiro lugar esperamos que maiores valores de α influenciem significativamente os tamanhos críticos z_c , visto que mais energia está sendo consumida a cada passo realizado, de maneira a diminuir as chances de encontro conforme α aumenta num dado tamanho fixo de rede. Entretanto o efeito de discretização da rede torna-se mais relevante à medida que α aumenta, assim levando à um z_c efetivo que não coincide com os pontos da rede, como podemos ver nas figuras 5.12 e 5.13.

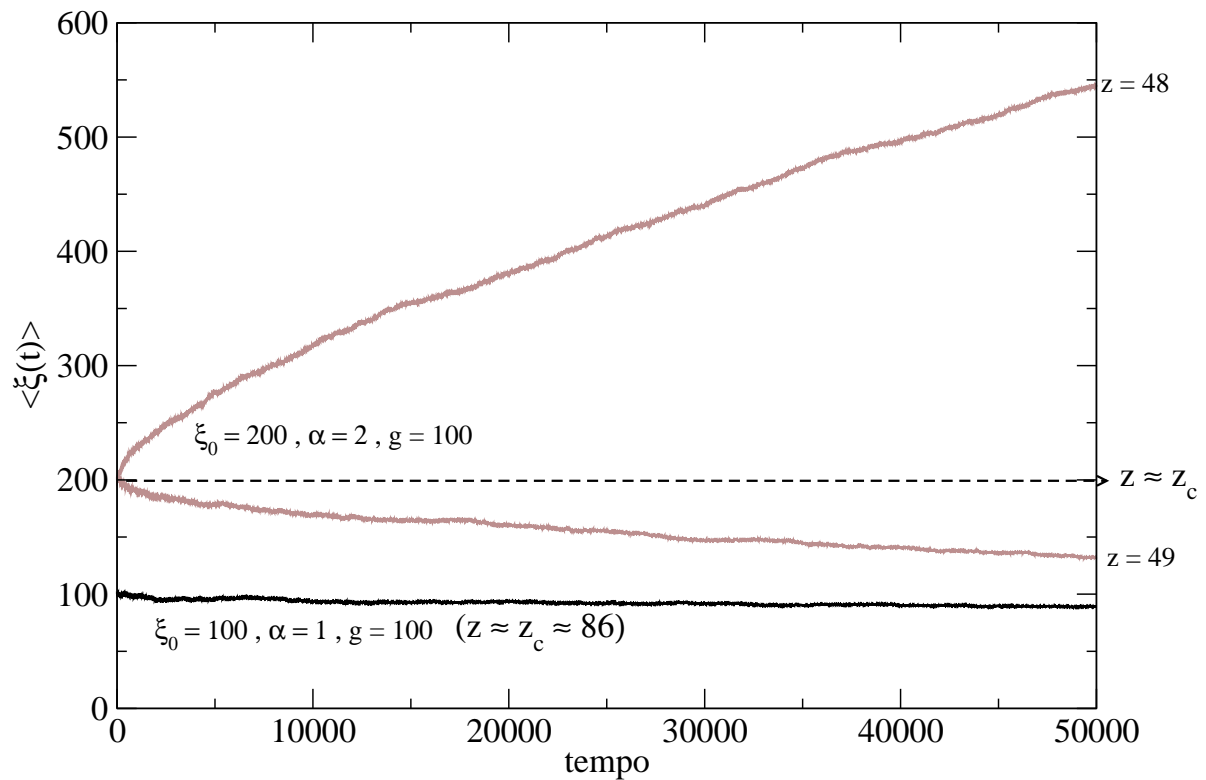


Figura 5.12: O aumento de α (a partir do caso típico $\xi_0 = 100, \alpha = 1$ e $g = 100$), para o conjunto $\xi_0 = 200, \alpha = 2$ e $g = 100$, onde foram mantidos constantes τ e g . O ponto crítico z_c não está localizado num tamanho inteiro da rede quando $\alpha = 2$. Aqui, $\mu_s = \mu_t = 2,0$. Ou seja, não há um z inteiro para o qual $\langle \xi(t) \rangle$ coincide com a linha tracejada esquemática.

Uma consequência deste efeito de discretização em torno do ponto crítico é observada na curva do parâmetro de ordem (figura 5.14). A passagem de uma fase a outra do sistema torna-se mais sensível com o tamanho de rede z conforme α vai aumentando. Note que a quantidade de pontos na região de rápida queda de Γ (cada ponto correspondendo a um

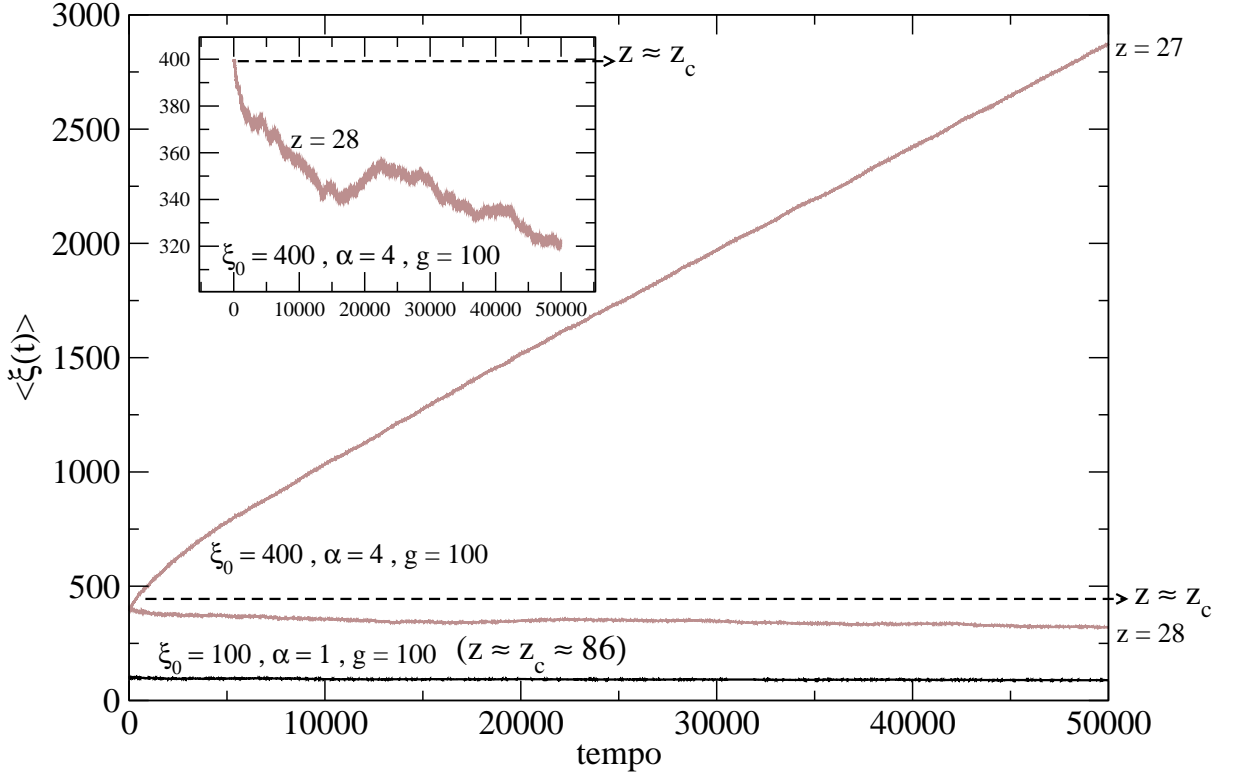


Figura 5.13: O aumento de α (a partir do caso típico $\xi_0 = 100, \alpha = 1$ e $g = 100$), para o conjunto $\xi_0 = 400, \alpha = 4$ e $g = 100$, também mantidos constantes τ e g ($\mu_s = \mu_t = 2, 0$). À medida que α aumenta, mais improvável é de obter z_c num dado tamanho inteiro z . A figura menor confirma que a energia média em $z = 28$ não permanece em torno de $\xi_0 = 400$, portanto não sendo o tamanho de rede crítico.

valor inteiro de z) decresce com o aumento de α . De fato, na curva de renormalização (figura 5.15), a região crítica é bem determinada para o conjunto ($\xi_0 = 100, \alpha = 1, g = 100$) mas não é precisa para outros conjuntos de parâmetros onde α aumenta, ou seja, não apresenta o ponto de cruzamento entre as curvas num determinado tamanho de rede z simulado. Para contornar esse problema é necessário fazer uma regressão polinomial que se ajuste às curvas de renormalização na região de transição, ou produzir um processo de busca no espaço contínuo, também em torno da região crítica, assim possibilitando o cálculo mais preciso dos expoentes críticos que governam as respectivas transições de fase para cada conjunto de parâmetros. Este é um dos tópicos de trabalho futuro para a presente tese.

5.4 O Efeito do Ganho Energético g

Assim como os demais parâmetros já analisados, espera-se que o efeito do ganho energético por alvo encontrado tenha um papel de interesse na dinâmica do sistema. Intuitivamente podemos imaginar que esse ganho por encontro (mantidos α e ξ_0 constantes)

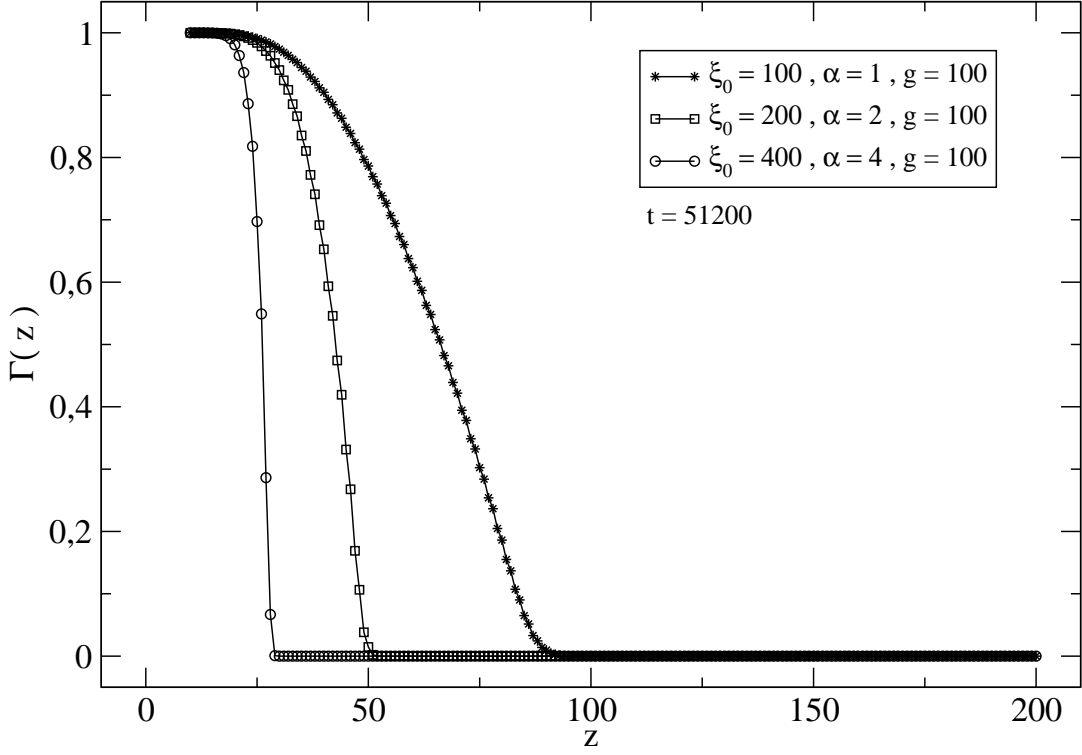


Figura 5.14: A taxa de sobrevivência $\Gamma(z, t)$ vs. o comprimento de rede z , mantidas constantes as quantidades g e τ ($\mu_s = \mu_t = 2, 0$). Variando α observamos a mudança no ponto crítico das transições.

leva à região crítica para altos valores de z , visto que para cada encontro uma quantidade de energia extra é fornecida ao buscador, assim permitindo-o caminhar por mais tempo durante o processo de busca.

Começamos então lembrando que para alguns valores de tempo pequeno as curvas apresentam a mesma taxa de sobrevivência. Este fato se dá porque se há um encontro no tempo $t > 0$ e t menor que o valor numérico de g (lembrando que todos os parâmetros são adimensionais), então há garantia de sobrevivência, no mínimo, até $t = g$. Assim:

$$\xi(z, t = 100)|_{g=100} = \xi(z, t = 200)|_{g=200} = \xi(z, t = 400)|_{g=400} = \dots \quad (5.2)$$

Portanto torna-se necessário simular tempos maiores de busca à medida que g cresce, como podemos ver na figura 5.16, onde $\Gamma(z)$ está em função de z e de um tempo máximo de simulação.

Observamos na figura 5.16 que à medida que g cresce (mantido constante α e ξ_0), os pontos críticos também aumentam, como esperado. Entretanto também temos que a maneira como o parâmetro de ordem se comporta na região crítica (mantidas as escalas das figuras para tal observação), é distinto para cada conjunto de parâmetros. Isto sugere, portanto, que os expoentes críticos tem características diferentes somente quando g é

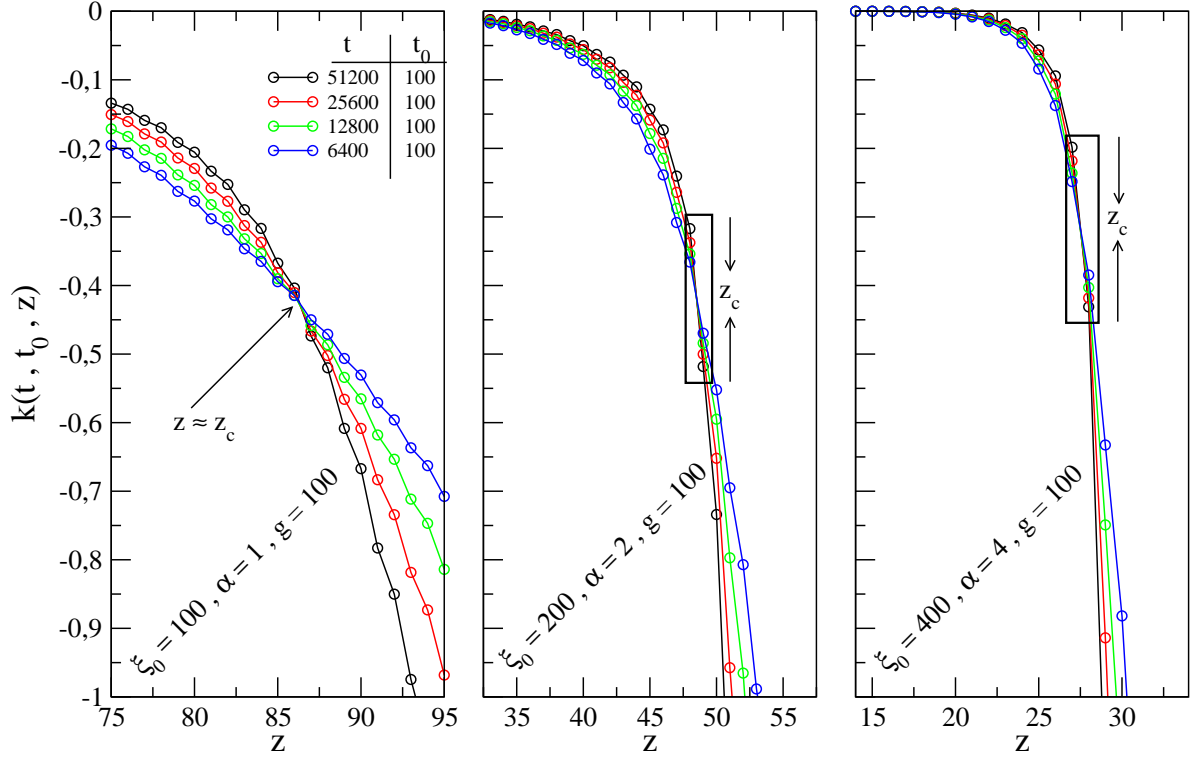


Figura 5.15: A renormalização numérica $k(t, t_0, z)$ para alguns conjuntos de parâmetros em função de z ($\mu_s = \mu_t = 2, 0$). Notamos que o aumento de α provoca o cruzamento entre as curvas num ponto que não corresponde a um valor de tamanho de rede z simulado (exceto para a situação típica $\xi_0 = 100$, $\alpha = 1$ e $g = 100$).

variado. Para averiguar esta hipótese, é necessário calcular os expoentes críticos através do método de análise de escala e renormalização numérica, conforme visto nos capítulos anteriores. Assim, a figura 5.17 mostra a função $k(t, t_0, z)$ para diferentes valores de z . Na região de cruzamento das curvas, temos justamente o valor de β/ν_{\parallel} , que são diferentes para os 3 g 's considerados. Porém notamos que cada conjunto de parâmetros energéticos apresenta valores similares independente da escolha de μ_s e μ_t (ver tabela 5.2).

Desta forma, os expoentes mudam significativamente entre um conjunto e outro de parâmetro, indicando que a classe de universalidade dos expoentes críticos (única quando consideramos as estratégias de caminhada adotadas) variam conforme as escolha dos parâmetros energéticos de ganho. Uma justificativa para essa mudança de classe de universalidade se baseia na hipótese de que tais parâmetros causam um forte efeito na dinâmica do sistema, uma vez que ir para a fase de sobrevivência ou morte após um tempo t depende da quantidade de energia absorvida a cada encontro. Tal efeito pode ser observado na função de distribuição energética depois de um longo período de tempo na região crítica de cada conjunto de parâmetros (figura 5.18). Conforme esta figura, a distribuição de energia (não só na altura dos picos, como também no deslocamento do mesmo) é diferente para cada conjunto de parâmetros (com aumento de g) tanto em tempos longos ($t \sim 10^5$) quanto em $t = \tau$. Nesse caso, distribuições energéticas diferentes implicam em distintas

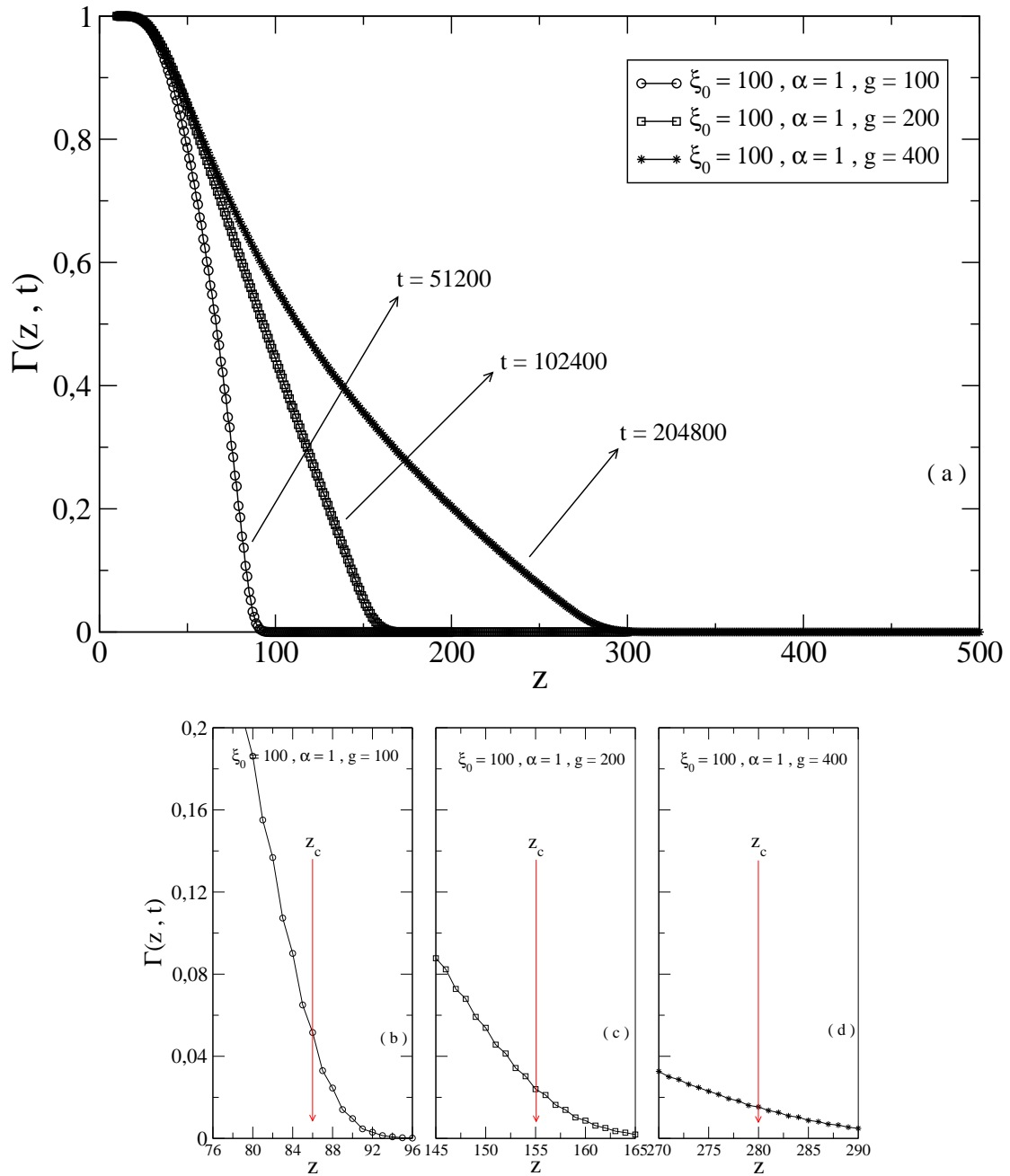


Figura 5.16: Em (a) temos o efeito do ganho por encontro no parâmetro de ordem do sistema $\Gamma(z, t)$. Para cada conjunto de parâmetros energéticos, a região crítica z_c aumenta conforme é o aumento de g . Entretanto, como mostrado em (b), (c) e (d), a maneira como $\Gamma(z)$ se comporta nas proximidades da região crítica (mantidas as escalas para análise), difere para cada conjunto de parâmetros. Isto sugere que os expoentes críticos que caracterizam a transição são diferentes. Aqui $\mu_s = \mu_t = 2,0$ e tais análises para os demais pares de caminhada são similares.

configurações (ou “ensembles”) iniciais de busca, acarretando na diferente configuração do número de alvos encontrados (figura 5.19) ao longo do tempo, portanto mudando a dinâmica de busca do sistema. Assim, o parâmetro de ordem comporta-se diferentemente para cada conjunto de parâmetros, produzindo distintos comportamentos de transições de fase, ou seja, alterando os expoentes críticos que governam tais transições. Contudo,

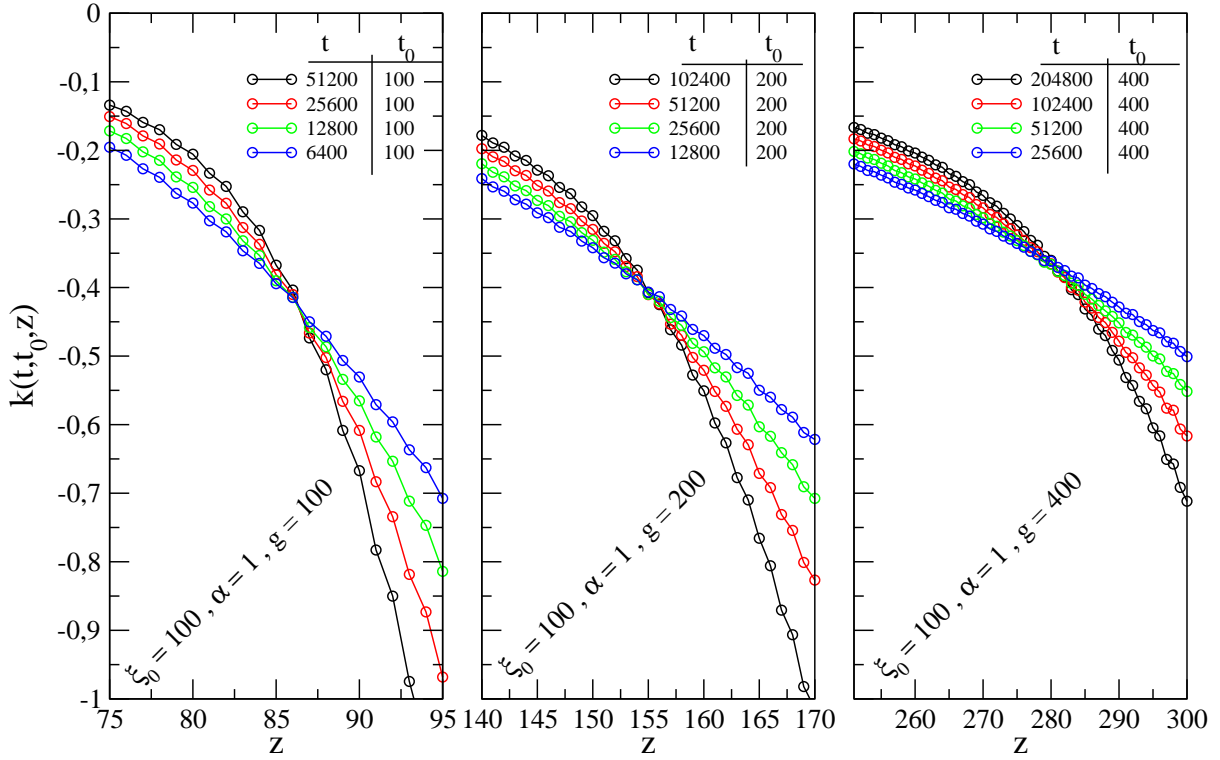


Figura 5.17: Renormalização numérica para três conjuntos de parâmetros energéticos onde é variada a energia g de ganho por alvo e $\mu_s = \mu_t = 2, 0$. Note que o cruzamento não se dá no mesmo valor de k para cada valor de g .

ainda há certa similaridade entre os expoentes (dentro de um mesmo conjunto de parâmetros) para diferentes estratégias de caminhadas (ver tabela 5.2). Isso sugere que possíveis classes de universalidade sejam formadas a depender dos parâmetros adotados, ou seja, das distribuições de energia do sistema.

Tais resultados nos levam a supor que, no contexto biológico, cada espécie animal está associada a sua própria classe de universalidade, ou seja, a velocidade de ida para a extinção ou sobrevivência depende do conjunto de parâmetros energéticos de cada espécie. Por esta razão que a escassez de alimentos (alvos) num dado ambiente, por exemplo, leva as espécies para a extinção em diferentes tempos e/ou formas. Talvez isto explique o porquê de alguns animais terem sobrevivido em situações catastróficas (enquanto outras não), como é o caso da tartaruga marinha, espécie a qual existe desde o tempo jurássico e cretáceo (~ 110 milhões de anos atrás) [112].

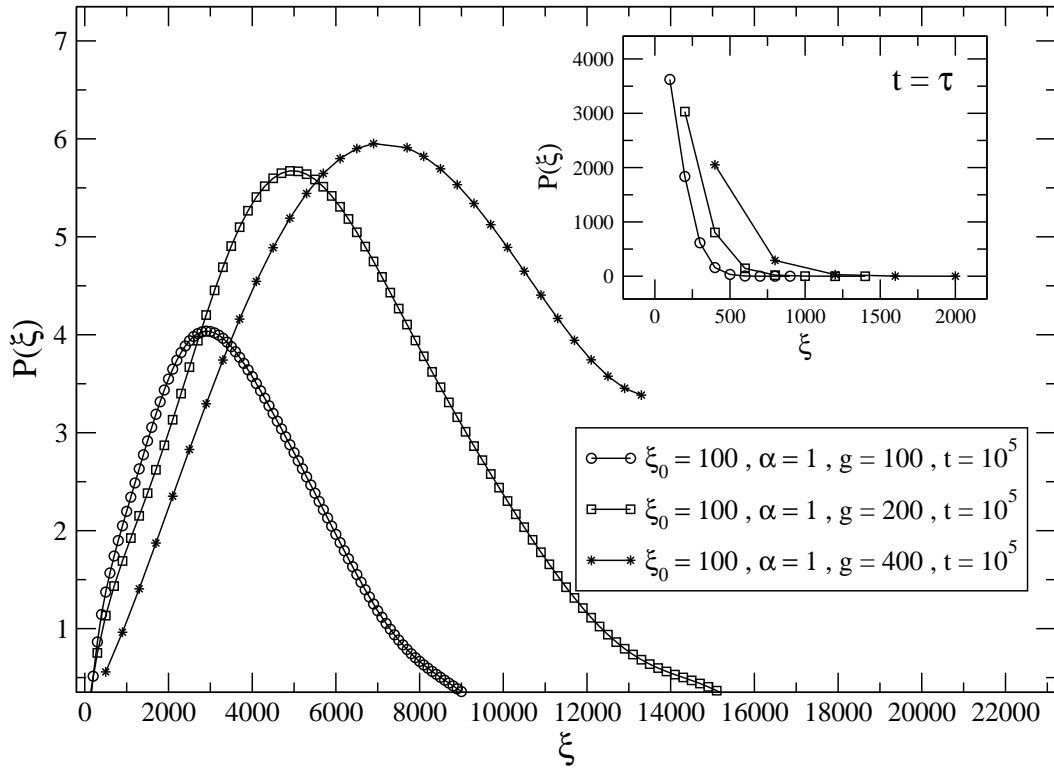


Figura 5.18: Distribuição de energia para diferentes conjuntos de parâmetros (mantendo ξ_0 e α fixos e variando apenas g para $\mu_s = \mu_t = 2, 0$) na região crítica de cada conjunto. Os resultados mostram que esse tipo de variação energética gera distribuições diferentes para cada conjunto analisado, indicando que a dinâmica possui comportamentos distintos na região crítica, portanto alterando os valores dos expoentes críticos.

5.5 Tempo de Autonomia Inicial (τ) e Efeitos Estatísticos

Como já comentado, $\tau = \xi_0/\alpha$ é o tempo que garante a sobrevivência do buscador caso nenhum alvo seja encontrado. Uma forma pela qual também podemos analisar os efeitos dessa quantidade é fixar um valor de energia inicial ($\xi_0 = 100$, por exemplo) e aumentar proporcionalmente o custo α e ganho g energético. Dessa maneira, os efeitos de ganho são compensados pelos efeitos de custo energético, de modo que a dinâmica é afetada apenas pela variação de τ . Analisando a figura 5.20, diminuir τ implica em baixar a probabilidade de sobrevivência para um dado tempo e densidade de alvos na região onde $z < z_c$. Esse comportamento existe porque elevar o valor de α diminui o quanto um buscador pode andar sem encontrar alvos. Como consequência, nos tempos iniciais muitos buscadores morrem e apenas aqueles que encontraram ao menos um alvo (justamente quando o papel dinâmico de g começa a se fazer presente) é que conseguem sobreviver. De modo análogo à sessão 5.1, aqui também não há mudanças nos valores críticos z_c , logo podemos concluir que os pontos críticos são determinados à partir da fração g/α , ou seja, é a razão entre o

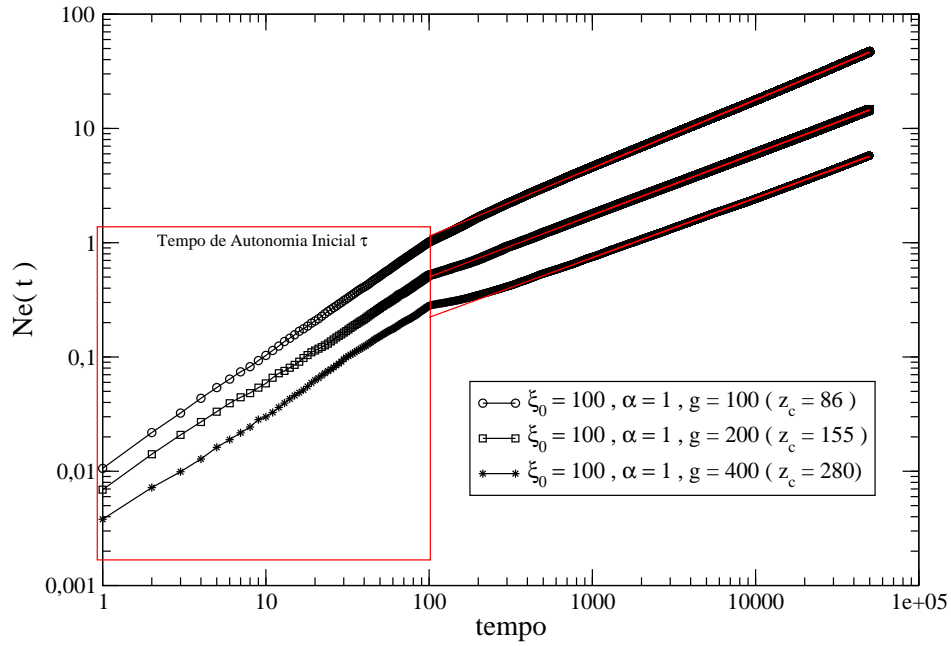


Figura 5.19: O número de encontros N_e em função do tempo para diferentes conjuntos de parâmetros e $\mu_s = \mu_t = 2, 0$. Após o tempo inicial de autonomia de caminhadas τ , a dinâmica de busca gera diferentes configurações do número de encontros com alvos conforme o tempo evolui.

μ_s	μ_t	z_c	β	$\nu_{ }$
$\alpha = 1, \xi_0 = 100, g = 100$				
3,0	3,0	54	0,6961	1,7104
3,0	2,0	72	0,7292	1,7152
2,0	2,0	86	0,7454	1,7243
3,0	1,1	96	0,7431	1,7481
2,0	1,1	104	0,7282	1,7450
1,1	1,1	115	0,7675	1,7363

μ_s	μ_t	z_c	β	$\nu_{ }$	μ_s	μ_t	z_c	β	$\nu_{ }$
$\alpha = 1, \xi_0 = 100, g = 200$					$\alpha = 1, \xi_0 = 100, g = 400$				
3,0	3,0	84	0,8892	1,7557	3,0	3,0	128	0,9011	1,7376
3,0	2,0	124	0,8610	1,7981	3,0	2,0	215	0,9320	1,8212
2,0	2,0	156	0,8671	1,8300	2,0	2,0	285	0,9575	1,8421
3,0	1,1	184	0,8961	1,8030	3,0	1,1	356	0,9760	1,8956
2,0	1,1	202	0,9002	1,8085	2,0	1,1	393	0,9814	1,8699
1,1	1,1	227	0,9114	1,8426	1,1	1,1	450	0,9586	1,8583

Tabela 5.2: Variando a energia ganha por encontro g e mantendo ξ_0 e α constantes. Os efeitos sobre os expoentes críticos indicam diferentes classes de universalidade, entretanto mantendo uma similaridade entre os expoentes dentro de cada conjunto, para diferentes estratégias de busca.

quanto se ganha por alvo e o quanto se gasta por passo que nos fornece a localização dos pontos críticos para seus respectivos pares μ_s e μ_t . Isto é fácil de ver, a partir da equação

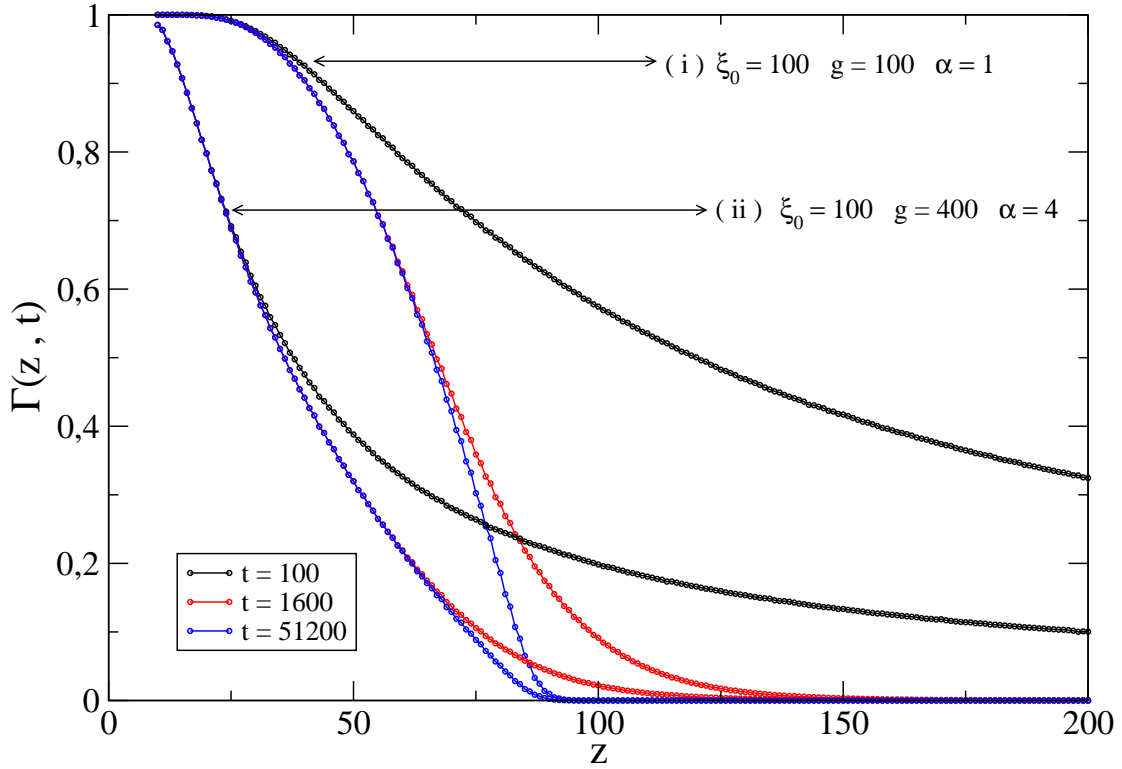


Figura 5.20: Um típico caso ($\mu_s = \mu_t = 2, 0$) onde os efeitos do tempo de autonomia inicial são observados. O decaimento de τ altera a forma de $\Gamma(z, t)$ nas proximidades do ponto crítico se t/τ não é grande o suficiente. Porém, a densidade crítica é mantida haja visto que a razão g/α permanece constante

3.3, que pode ser reescrita como:

$$\frac{\xi_t - \xi_0}{\alpha} = \sum_{i=1}^t \left(\frac{g}{\alpha} \delta_i - \ell_i \right) \quad (5.3)$$

Notamos então que na situação crítica, o lado esquerdo da equação 5.3 se anula. Assim o lado direito (que define z_c) fica apenas em função da razão g/α e z (implicitamente). Logo, para g/α constante, $z = z_c$ tem que ser o mesmo.

Outra observação importante é que o comportamento durante o tempo τ afeta de maneira significativa a forma como a taxa de sobrevivência $\Gamma(z, t)$ evolui com o tempo quando $t/\tau > 1$ não é muito grande (como mostra a figura 5.20). Tal fato ocorre devido às distintas distribuição de energia geradas até τ e, conseqüentemente, após um valor t grande mas não assintoticamente grande, tal memória ainda estará presente em Γ (como mostra a figura 5.21).

A consequência desse fato é que os expoentes críticos β e ν_{\parallel} também são alterados quando comparados dois ou mais conjuntos de parâmetros energéticos, mas são similares (dentro de cada conjunto) para diferentes estratégias de busca μ_s e μ_t , conforme mostra a tabela 5.3. Assim, levando em conta os problemas numéricos mencionados para calcular

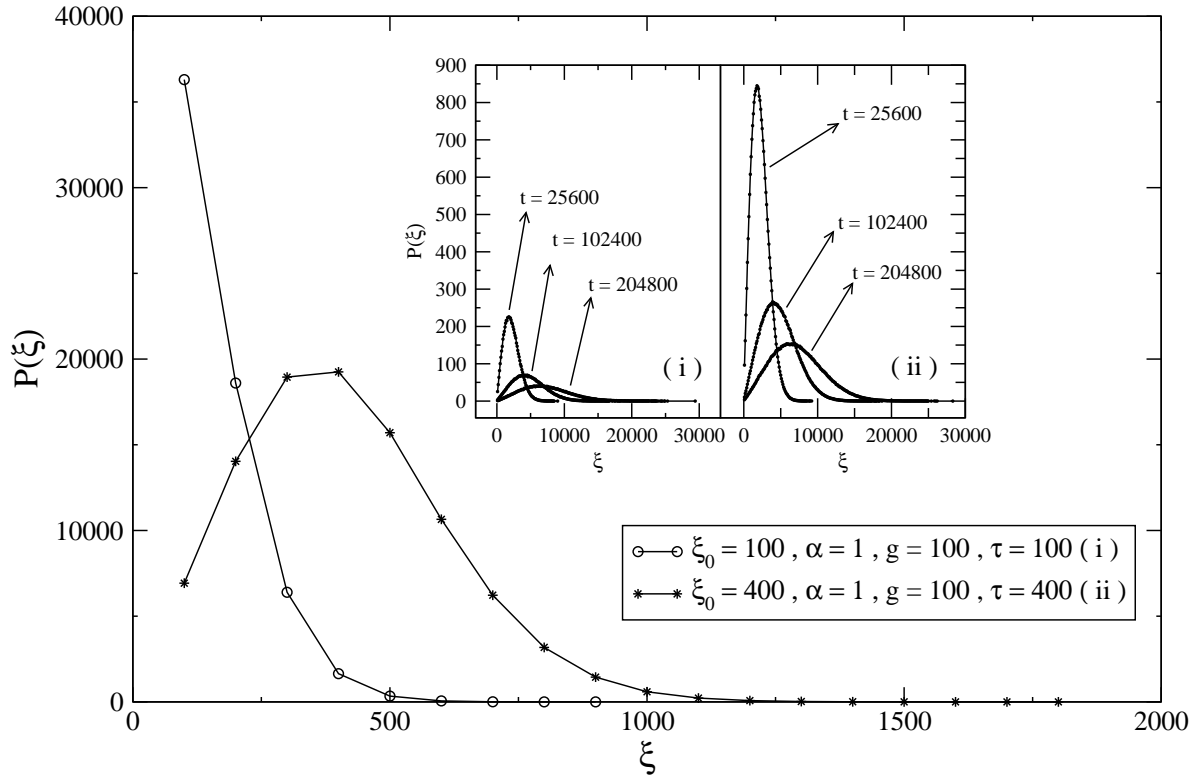


Figura 5.21: Distribuições de energia diferentes conforme varia τ , mantido constante α e g ($\mu_s = \mu_t = 2, 0$). Portanto dinâmicas diferentes são geradas (como visto em (i) e (ii)), onde tais conjuntos de parâmetros apresentam distribuições de energia distintas mesmo após um longo tempo t .

os expoentes na rede discreta, aqui temos uma indicação que para α e g fixos (variando ξ_0), os parâmetros de estratégia de busca não influenciam os expoentes críticos. Este resultado é importante porque indica a universalidade dos expoentes com relação aos μ 's, dada uma configuração de parâmetros energéticos.

Outra constatação interessante é que buscadores brownianos rapidamente morrem quando comparados a buscadores balísticos. Ainda de acordo com a tabela 5.3, a diferença numérica entre a situação $\mu_s = \mu_t = 3, 0$ e $\mu_s = \mu_t = 1, 1$, no conjunto $\xi_0 = 100$, $g = 100$ e $\alpha = 1$, é bem menor do que no conjunto $\xi_0 = 100$, $g = 400$ e $\alpha = 4$. Isso retrata um pouco de sensibilidade da universalidade com relação à difusividade do buscador. Assim, aumentar g e α (mesmo que proporcionalmente) pode gerar muita flutuação local no processo de balanço energético de encontro por cada alvo. Nesse sentido, $\mu_s = \mu_t = 3, 0$ significa um movimento similar ao browniano, logo pouco eficiente em baixas densidades e assim passível de fugir a um comportamento menos sensível a variações locais, a que se dá quando a dinâmica é superdifusiva (μ_s e μ_t menores).

A figura 5.22 mostra o comportamento de β/ν_{\parallel} e $1/\nu_{\parallel}$ para o caso $\mu_s = \mu_t = 2, 0$ e para dois conjuntos de parâmetros energéticos na região crítica. Como podemos ver, tanto o expoente β como o expoente ν_{\parallel} são diferentes quando comparados aos conjuntos

de parâmetros energéticos onde apenas τ é variado. Já a figura 5.23 apresenta o aumento da dispersão nos valores dos expoentes (analisados para várias estratégias de caminhada) à medida que τ aumenta. Tal dispersão é devido ao aumento de flutuação local quando α e g aumentam proporcionalmente, acarretando numa maior sensibilidade na dinâmica (e no balanço energético) quando as estratégias seguem para um limite menos superdifusivo.

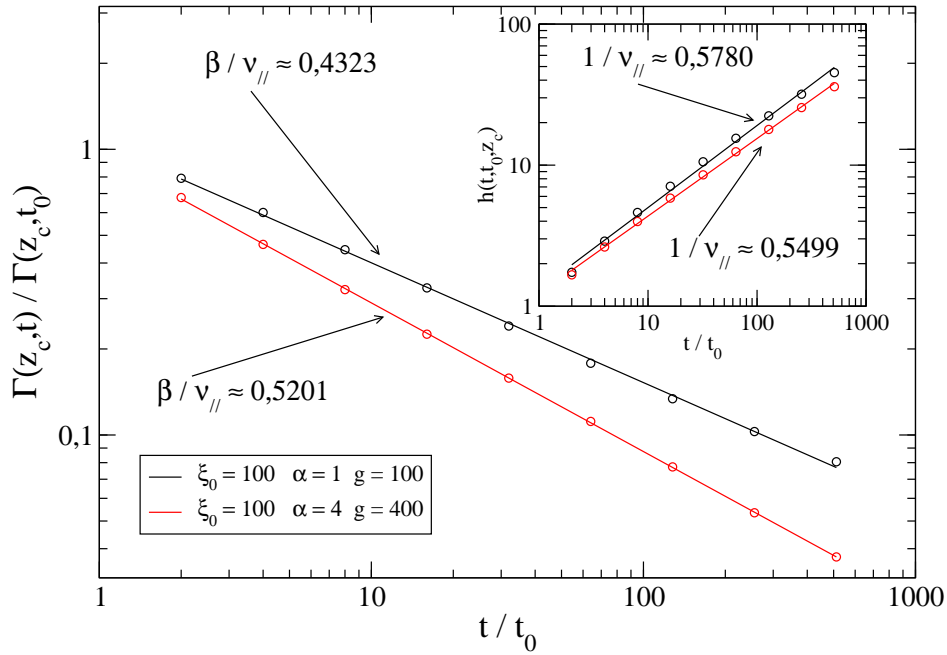


Figura 5.22: Os expoentes β e $\nu_{||}$ no caso $\mu_s = \mu_t = 2,0$. Tais resultados indicam que os expoentes críticos são distintos (com relação aos seus respectivos conjuntos de parâmetros) porque a dinâmica de busca possui distribuições de energia diferentes. Nesta figura, a análise de escala é feita para $t_0 = 100$.

No contexto biológico, essas classes de universalidade (ou mais resumidamente, “janelas de universalidade”) referentes à cada conjunto de parâmetros energéticos, podem ser justificadas pelo tipo de metabolismo energético de cada espécie, assim como pelas características comportamentais de distintos organismos sob uma condição crítica. Isto novamente sugere que diferentes espécies em momentos críticos, apresentam distintos mecanismos que levam à extinção. Por exemplo, por volta de 65 milhões de anos atrás, alguns mamíferos conseguiram sobreviver sob drásticas condições ambientais oriundas da queda de um meteorito de aproximadamente 10 Km de diâmetro que atingiu a península do Yucatán (sudeste do México). Essa sobrevivência pode ter ocorrido devido à mudança de estratégia para obtenção de alimento, assim como alterações nos parâmetros energéticos relacionados aos processos de busca, de forma a otimizar as condições de sobrevivência. No entanto (e como hipótese), algumas outras espécies (como os dinossauros, por exemplo) por alguma razão não conseguiram realizar uma apropriada mudança de comportamento de estratégia ou de energia ao qual estavam habituados, conduzindo-os à extinção.

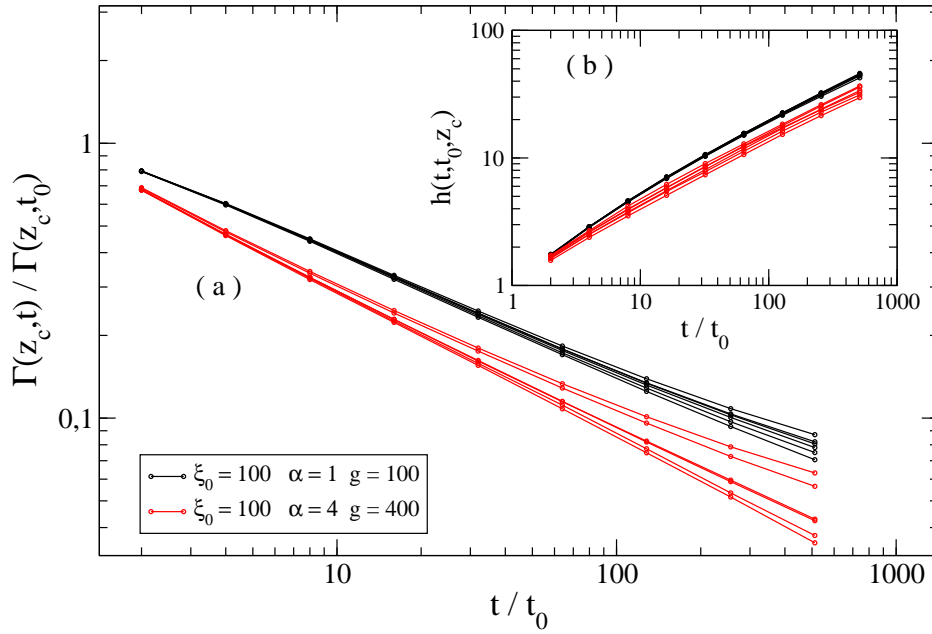


Figura 5.23: Em (a) temos a dispersão dos expoentes β/ν_{\parallel} (dentro de um dado conjunto de parâmetros) para várias estratégia de caminhada μ_s e μ_t . Em (b) a dispersão é observada para o expoente $1/\nu_{\parallel}$. Em ambas as figuras, é usado $t_0 = 100$ para a devida análise de escala.

μ_s	μ_t	z_c	β	ν_{\parallel}	μ_s	μ_t	z_c	β	ν_{\parallel}
$\xi_0 = 100, \alpha = 1, g = 100$					$\xi_0 = 100, \alpha = 2, g = 200$				
3,0	3,0	54	0,6961	1,7104	3,0	3,0	54	0,7536	1,7646
3,0	2,0	72	0,7292	1,7152	3,0	2,0	72	0,8143	1,8434
2,0	2,0	86	0,7454	1,7243	2,0	2,0	86	0,8038	1,8378
3,0	1,1	96	0,7431	1,7481	3,0	1,1	96	0,8285	1,8327
2,0	1,1	104	0,7282	1,7450	2,0	1,1	104	0,8921	1,8133
1,1	1,1	115	0,7675	1,7363	1,1	1,1	116	0,8969	1,8309
μ_s	μ_t	z_c	β	ν_{\parallel}	μ_s	μ_t	z_c	β	ν_{\parallel}
$\xi_0 = 100, \alpha = 3, g = 300$					$\xi_0 = 100, \alpha = 4, g = 400$				
3,0	3,0	54	0,7821	1,8151	3,0	3,0	54	0,7934	1,8292
3,0	2,0	72	0,8233	1,8407	3,0	2,0	72	0,8454	1,8738
2,0	2,0	87	0,9357	1,8046	2,0	2,0	87	0,9458	1,8183
3,0	1,1	96	0,8546	1,8723	3,0	1,1	97	0,9699	1,8327
2,0	1,1	105	0,9304	1,8671	2,0	1,1	105	0,9310	1,8855
1,1	1,1	116	0,9174	1,8509	1,1	1,1	116	0,9369	1,8878

Tabela 5.3: Expoentes críticos para diferentes parâmetros de busca quando o tempo de autonomia inicial τ é variado. Assim como na seção anterior, os resultados sugerem a existência de classes de classes de universalidade, como uma consequência de diferentes dinâmicas de buscas (ou “ensembles” de energia) para determinados tipos de variações dos parâmetros.

Dinâmica de Busca no Espaço Bidimensional: Formulação do Problema e Resultados Iniciais

A formulação do problema da busca aleatória bidimensional é basicamente a mesma que a do caso unidimensional. Apesar de ter como motivação o fato de existirem na natureza vários sistemas nos quais o processo de busca se faz num ambiente 2D, espera-se que nesse caso as flutuações decorrentes das quantidades de interesse, tais como a energia, taxa de sobrevivência ou número de encontros com alvos, sejam menos impactantes quando comparadas ao caso unidimensional, visto que o aumento de dimensões num dado sistema físico leva a comportamentos mais próximos de campo médio. De uma forma geral, o interesse continua voltado ao entendimento do porquê determinadas espécies mudam a dinâmica de busca (difusiva \rightarrow superdifusiva) numa situação onde o ambiente de busca se torna escasso de alvos (objetos de interesse: comida, água, abrigo etc).

Nos capítulos anteriores, foi mostrado que essa mudança de comportamento ocorre justamente por permitir que a sobrevivência do organismo buscador seja garantida em menores densidades de alvos, onde a transição contínua do estado de sobrevivência para o estado de extinção é caracterizada pelo parâmetro de ordem *Taxa de Sobrevivência* $\Gamma(\lambda, t)$ e por um parâmetro de controle λ . Dando continuidade desta abordagem, o objetivo desse capítulo é apresentar alguns resultados preliminares do comportamento de buscas em ambientes onde buscadores e alvos têm mobilidade num ambiente 2D. Porém, em duas dimensões várias dificuldades surgem da complexidade computacional da implementação dinâmica do modelo de busca, principalmente decorrente da simultaneidade e independência das regras de caminhada. Basicamente apresentaremos duas possibilidades de análise dos processos de buscas 2D, que são os modelos ou critérios de caminhada,

e analisaremos as quantidades de interesse tal como feito nos capítulos anteriores. Vale ressaltar que de forma análoga ao caso 1D, todas as análises foram feitas tomando como base resultados numéricos, e não analíticos, uma vez que até o presente momento não há uma descrição matemática que caracterize tais sistemas dinâmicos por meio de equações de movimento não acopladas (independência de movimentos buscador-alvo) e com constantes mudanças de parâmetros (sentido e tamanho da caminhada, condições energéticas etc) e que leve em conta os aspectos estocásticos da busca e detecção. Por fim, salientamos que observadas as propriedades vistas num modelo de rede discreta em 1D, aqui faremos todo o desenvolvimento do modelo para ambientes contínuos.

6.1 O Modelo

Nesta seção trataremos de dois modelos específicos: o *Modelo de Tamanho de Ambiente Variável* e o *Modelo de Número de Alvos Variáveis*. O primeiro caso é um modelo similar ao caso 1D, conforme capítulos anteriores, ou seja, fixamos apenas 2 organismos caminhando (Buscador e Alvo) e variamos o tamanho do ambiente onde a busca é realizada. Essa variação fornece a caracterização de densidade de alvos. Assim, em ambientes grandes o buscador encontra o alvo com menos frequência, portanto sendo um sistema similar ao caso de baixas densidades de alvos. Já para ambientes pequenos, o buscador encontra o alvo com muita frequência e assim o sistema é análogo à situação de altas densidades. Por outro lado, o Modelo de Alvos Variáveis retrata um caso onde fixamos um espaço onde há o processo de busca, isto é, definimos o tamanho do ambiente de caminhada como $z \times z$ (área quadrada), e variamos o número de alvos no mesmo. Assim, a medida que o número de alvos aumenta, a densidade de alvos no ambiente também aumenta e portanto mais prováveis são os encontros entre buscador e alvos. Ambos os modelos, na prática, apresentam diversas aplicações, e nosso objetivo maior é verificar se os dois modelos geram a mesma dinâmica de busca, ou seja, se apresentam os mesmos resultados qualitativos/quantitativos, e quando diferirem, quais as razões para tal.

6.1.1 Variação no Tamanho do Ambiente

Assim como no caso 1D, aqui também consideramos a caminhada aleatória de um Buscador e um Alvo, ambos com velocidades constantes e unitárias. No entanto, o ambiente de busca se dá numa área quadrada $z \times z$, onde as bordas dessa região são levadas em consideração com o objetivo de dar limites ao espaço de busca dos organismos, assim como ocorre em vários sistemas na natureza. O comprimento de caminhada dos organismos é governado pela distribuição de Lévy $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, onde μ caracteriza o tipo de caminhada.

Também consideramos o caso onde o alvo é destrutível, ou seja, após ser detectado um outro alvo surge numa posição aleatória do ambiente. Em suma, a dinâmica de movimento tem as seguintes características:

1. O buscador e o alvo iniciam em posições aleatórias da área quadrada $z \times z$.
2. Aleatoriamente, o buscador e o alvo escolhem um sentido de movimento (podendo ser qualquer valor no intervalo $[0, 2\pi]$ e um tamanho do voo ℓ_j .
3. A cada voo j executado, o buscador perde uma energia α_j proporcional à distância viajada.
4. O buscador, durante o voo, verifica se o alvo está em seu raio de visão r_v . Se nenhum alvo for detectado depois de ℓ_j , então o buscador retorna ao passo 2.
5. Entretanto, se o alvo for detectado então ele é eliminado, o buscador ganha uma energia constante g e retorna ao passo 2. Um novo alvo é criado (obedecendo ao passo 2) numa posição aleatória do ambiente - processo de busca destrutiva.
6. Se o buscador ou o alvo, durante a caminhada, intercepta alguma borda ou vértice nos limites da área quadrada, então o voo é truncado, ou seja, o organismo pára e volta a escolher um novo sentido de voo (não podendo escolher um sentido de voo que viole o espaço de busca) e um novo comprimento de caminhada.

Alguns aspectos importantes à respeito desse modelo:

- A densidade de alvos é caracterizada quando variamos o tamanho da rede quadrada. Assim, quanto menor for a área de busca, maiores são as chances de detectar um alvo, caracterizando um ambiente de alta densidade. Por outro lado, quanto maior for a área de busca, mais difícil torna-se a localização do alvo, caracterizando um ambiente de baixa densidade. Em outras palavras, a variação da densidade de alvos está associada à variação da área de busca da rede.
- Os efeitos de borda atuam somente na truncagem dos voos. Tais efeitos são importantes porque em diversos sistemas naturais, o ambiente de busca é limitado, visto que o espaço é finito. Assim, de certa forma os limites do ambiente formam paredes que refletem o buscador de volta para o interior da região de busca.
- Ao contrário do caso 1D, o algoritmo/código computacional para o caso 2D é muito mais complexo, principalmente pelo fato de existir a dinâmica de dois organismos ao mesmo tempo, de forma independente e que estão em direções arbitrárias, ao invés de esquerda-direita do caso 1D.

- Para otimizar o tempo de processamento das simulações numéricas, foi elaborado um código de busca otimizado, baseado nas equações de movimento dos organismos, cujos detalhes encontram-se no Apêndice B.

6.1.2 Variação no Número de Alvos

Aqui consideramos a caminhada aleatória de um buscador e vários alvos, todos com velocidades constantes e unitárias. O ambiente de busca ocorre numa área quadrada $z \times z$, onde o número de alvos simulados (definido como n_A) está confinado no intervalo de tal região. Assim como no modelo de tamanho de ambiente variável, as bordas são levadas em consideração para limitar o espaço de busca dos organismos. O comprimento de caminhada do buscador e do alvo também é governado pela distribuição de Lévy $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, onde μ caracteriza o tipo de caminhada. Os alvos são destrutíveis e a dinâmica de movimento tem as seguintes características:

1. O buscador e os alvos iniciam em posições aleatórias da uma área quadrada $z \times z$.
2. Aleatoriamente, o buscador e os alvos escolhem um sentido de movimento (podendo ser qualquer valor no intervalo $[0, 2\pi]$) e um tamanho do voo ℓ_j .
3. A cada voo j executado, o buscador perde uma energia α_j proporcional à distância viajada.
4. O buscador, durante o voo, verifica se há alvos em seu raio de visão r_ν . Se nenhum alvo for detectado depois de ℓ_j , então o buscador retorna ao passo 2.
5. Se um ou mais alvos são detectados, o buscador captura o alvo mais próximo a ele e ganha a energia constante g desse alvo, retornando ao passo 2. Um novo alvo é criado numa posição aleatória da rede, mantendo assim a densidade de alvos e caracterizando o caso de alvos destrutíveis.
6. Se o buscador ou algum alvo, durante a caminhada, intercepta alguma borda ou vértice da área de busca, então o voo é truncado, ou seja, o organismo pára e volta a escolher um novo sentido e comprimento de voo (não podendo escolher um sentido de voo que viole o espaço de busca).

Algumas aspectos adicionais:

- A densidade de alvos é caracterizada quando variamos o número de alvos na rede, ou seja, $\rho = n_A/z^2$. Assim, para $n_A \rightarrow 1$, o número de encontros são remotos (baixa densidade), e para $n_A \rightarrow z^2$ o número de encontros são frequentes (alta densidade).

- Os efeitos de borda atuam somente na truncagem dos voos, dando sentido ao limite físico de busca.
- O algoritmo/código computacional para o caso 2D - alvos variáveis, é ainda mais complexo que no modelo de redes fixas, pois teremos a dinâmica de $n_A + 1$ organismos, ao mesmo tempo e de forma independente. Notamos que esse modelo é similar à dinâmica molecular, se diferenciando apenas no fato de que os alvos não interagem entre si, mas apenas com o buscador. Para tanto, quanto maior o número de alvos, maior é o tempo de simulação, haja visto que o número de condições e possibilidades de caminhada com o aumento do número de alvos, aumenta significativamente.

6.2 Evolução Energética

Como já sabemos, a energia do buscador após N passos (ou t tempo de busca) é governada pela equação 3.3, onde $\xi_t = \xi_0 + \sum_{i=1}^t (g\delta_i - \alpha_i)$. De acordo com o modelo, fizemos as simulações onde variamos o parâmetro de difusão μ_s e μ_t em várias combinações. Os parâmetros das simulação permaneceram os mesmos do caso típico adotado no capítulo 4, ou seja, energia inicial $\xi_0 = 100$, energia ganha $g = 100$, energia gasta por passo $\alpha = 1$, $r_v = 1$ e velocidades unitárias. As análises estatísticas foram feitas considerando um total de 1000 amostras, onde para cada amostra o buscador caminha no máximo $t = 10^4$ passos.

TAMANHOS DE AMBIENTES

Nesse modelo, o comportamento energético é muito similar ao observado para o caso 1D (ver figura 3.3). Porém, a energia decresce rapidamente à medida que a rede cresce. Esse fato retrata explicitamente o efeito da dimensão do sistema (mesmo que as densidades sejam iguais em 1D e 2D, a proliferação dos caminhos a seguir em 2D faz com que haja maior número de passos sem encontrar alvos e a eficiência global do processo naturalmente decresce).

Definindo $\rho = g/z^2$ como a densidade efetiva de alvos e ρ_c como sendo a densidade na qual não há ganho nem perda de energia, então:

1. Se $\Delta\xi > 0$, então houve eficiência na busca e portanto ela ocorreu em densidades que permitiram a sobrevivência do buscador, ou seja, em $\rho > \rho_c$;
2. Se $\Delta\xi < 0$, então não houve eficiência na busca, ocorrendo em densidades que levaram o buscador à morte, em valores de $\rho < \rho_c$;

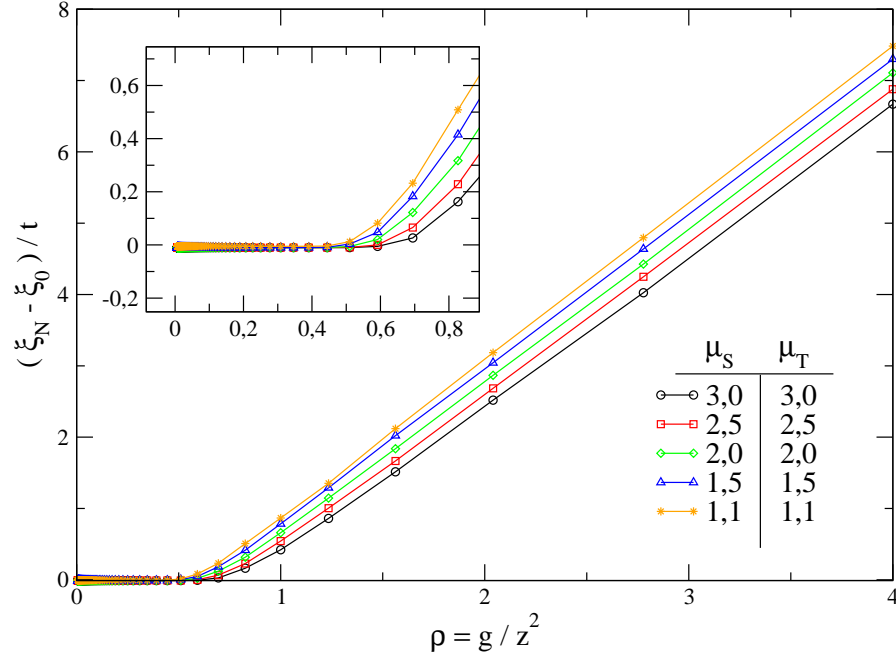


Figura 6.1: Ganho energético como função da densidade efetiva de alvos g/z^2 . Na figura menor, o comportamento das curvas que representam alguns conjuntos de combinações de difusão próximo à extinção.

3. Se $\Delta\xi \approx 0$, a energia líquida ganha foi nula, de forma que a busca ocorreu numa densidade crítica ρ_c , onde pequenas flutuações no sistema levam o buscador para o estado de sobrevivência (por um certo tempo) ou morte.

Na figura 6.1 podemos observar o comportamento do ganho energético para algumas combinações de μ_s e μ_t (como podemos notar, o comportamento das curvas são similares às apresentadas na figura 3.3). Na magnificação desta figura (em detalhe), fica fácil perceber que a busca superdifusiva é a melhor estratégia a ser tomada quando o ambiente possui uma baixa densidade de alvos. Esse fato também pode ser analisado de acordo com a tabela 6.1, onde apresentamos os valores de ρ_c para várias combinações de difusão.

Podemos notar na tabela 6.1 que para diversas combinações, a densidade crítica é $\rho_c = 0,591$. Curiosamente, esse valor é aproximadamente igual (para redes quadradas) à concentração crítica para um sistema que apresenta uma difusão frontal [110, 113, 114]. A figura 6.2 retrata como se comporta a densidade crítica a medida que variamos os valores de μ dos organismos.

Para o caso 1D, fixado um valor de μ_t , a densidade ρ_c depende de forma linear com μ_s (figura 4.3). Já Na figura 6.2, observamos a grande incidência do valor $\rho_c = 0,591$ para diversas combinações de μ 's. Dessa forma, para o caso 2D, a densidade crítica de sobrevivência depende mais fracamente com o par μ_s e μ_t , variando do valor de $\rho_c = 0,694$ (*Browniano-Browniano*) até o valor $\rho_c = 0,510$ (*Balístico-Balístico*), sendo $\rho_c = 0,591$

Tabela 6.1: Densidades críticas para vários conjuntos de μ_s e μ_t

μ_t	μ_s	ρ_c	μ_t	μ_s	ρ_c	μ_s	μ_t	ρ_c
3,0	3,0	0,694	2,5	3,0	0,694	2,0	3,0	0,591
3,0	2,5	0,694	2,5	2,5	0,591	2,0	2,5	0,591
3,0	2,0	0,591	2,5	2,0	0,591	2,0	2,0	0,591
3,0	1,5	0,591	2,5	1,5	0,591	2,0	1,5	0,591
3,0	1,1	0,591	2,5	1,1	0,591	2,0	1,1	0,510

μ_t	μ_s	ρ_c	μ_t	μ_s	ρ_c
1,51	3,0	0,591	1,1	3,0	0,591
1,5	2,5	0,591	1,1	2,5	0,591
1,5	2,0	0,591	1,1	2,0	0,510
1,5	1,5	0,510	1,1	1,5	0,510
1,5	1,1	0,510	1,1	1,1	0,510

para várias outras combinações. Este comportamento eventualmente é um efeito de campo médio. Assim, mais análises são necessárias para comprovar tal afirmação.

NÚMERO DE ALVOS VARIÁVEIS

Aqui temos o caso onde fixamos a área de busca (128×128) e variamos a quantidade de alvos em rede, onde $n_A \in [1, 32]$ (regime de interesse, baixas densidades para a rede 128×128). Para cada n_A , simulamos um total de $t = 10^4$ passos e verificamos o comportamento energético para 3 combinações de μ_s e μ_t , conforme figura 6.3. Vale mencionar que o trabalho computacional neste caso é enorme, portanto as simulações realizadas apenas foram feitas para um número relativamente pequeno de alvos.

O que podemos perceber nesse limite extremo de baixas densidades é o fato da busca superdifusiva $\mu \rightarrow 1^+$ ter uma significativa vantagem para a sobrevivência do organismo buscador, conforme mostrado na figura 6.3: para todas as densidades, quando $\mu_s = \mu_t = 3,0$ e $\mu_s = \mu_t = 2,0$, o buscador possui $\xi_N - \xi_0 < 0$, ou seja, a busca é ineficiente levando o buscador à morte. Por outro lado, para $\mu_s = \mu_t = 1,1$ o buscador permanece com energia líquida positiva após o tempo de simulação $t = 10.000$ e $n_A \geq 32$, ou seja, $\xi_N - \xi_0 > 0$. Assim, para o caso onde buscador e alvos possuem caminhadas balísticas, o número crítico de alvos que leva o estado de sobrevivência ao estado de extinção, está justamente na região onde $n_{A,c} \approx 32$ (com os outros parâmetros fixos). Essa eficiência superdifusiva se explica pelo buscador poder varrer uma área maior na rede quando $\mu_s = 1,1$, uma vez que os voos são longos, característicos de um processo balístico. Portanto, se o buscador faz a busca em muitas regiões da rede, então ele tem uma maior probabilidade de encontrar alvos que eventualmente estejam localizados longe dele. Para retratar esse efeito de varredura, a

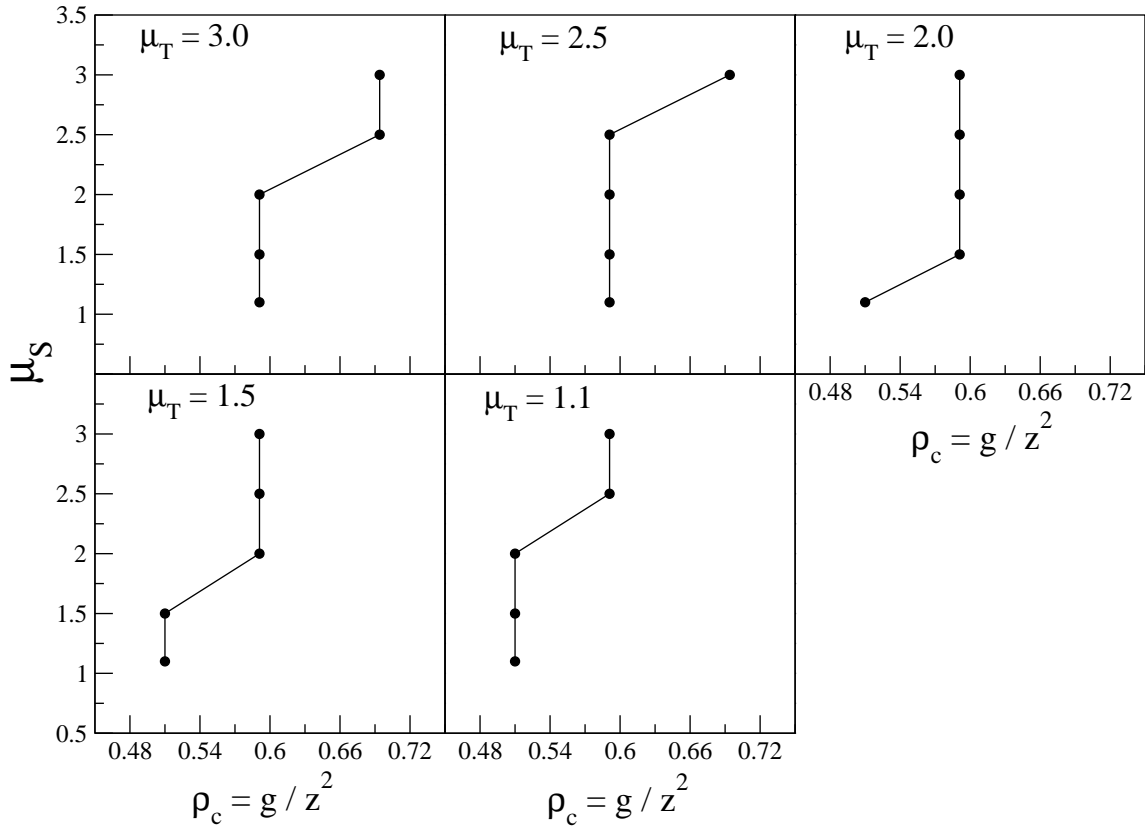


Figura 6.2: O comportamento da densidade crítica de sobrevivência para diversas combinações de μ_s e μ_t

figura 6.4 mostra o caso de uma caminhada bidimensional do buscador para alguns valores de μ , com o tempo de caminhada sendo de $t = 5.000$ e considerando os efeitos de bordas, portanto truncando os voos.

Os resultados para o comportamento de busca em altas densidade ($n_A \rightarrow z^2$) além de não serem triviais do ponto de vista físico e biológico, uma vez que esperamos uma elevada taxa de encontros, portanto diminuindo os efeitos relativos às caminhadas adotadas, aumentam significativamente o tempo das simulações numéricas, visto que o número de interações ou possibilidades de contato aumenta conforme o número de alvos cresce na rede. Entretanto, para a situação aqui apresentada de baixas densidades, já podemos constatar o crescimento na eficiência energética para buscas superdifusivas quando comparadas a buscas brownianas.

6.3 Taxa de Sobrevivência

Aqui também apresentamos simulações para determinar como a *Taxa de Sobrevivência* $\Gamma(z^2, t)$ do organismo buscador evolui com a dimensão (área) de busca $z \times z$. Para tanto, foram feitas simulações com 1000 buscadores. Para cada buscador, ao final do tempo de

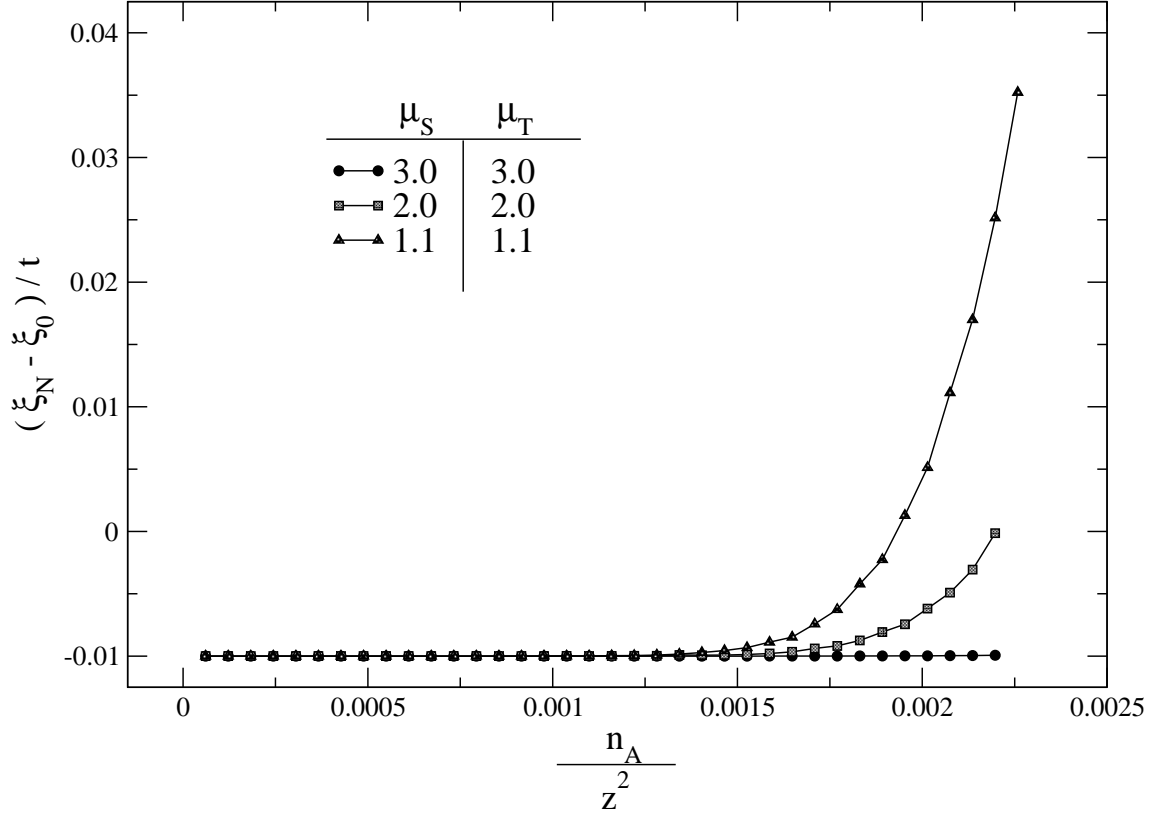


Figura 6.3: Variação energética para o modelo de alvos variáveis. O comportamento balístico $\mu_s = \mu_t = 1, 1$ mostra ser mais eficiente quando comparado à dinâmica browniana $\mu_s = \mu_t = 3, 0$. As curvas de energia foram geradas para uma rede 128×128 para baixas densidades de alvos, $n_A \in [1, 32]$

busca t , é verificado se sobreviveu ou não, ou seja, se $\xi(t) > 0$. Após as simulações dos 1000 buscadores, é determinada a taxa de sobrevivência. Esse procedimento é repetido 200 vezes para considerar os efeitos estatísticos de $\Gamma(z^2, t)$. Tal metodologia é idêntica ao feito no caso 1D, e os parâmetros são os mesmos adotados para uma típica situação de $\xi_0 = 100$, $g = 100$ e $\alpha = 1$. Para algumas combinações de μ_s e μ_t , a figura 6.5 mostra o comportamento da taxa de sobrevivência.

Analogamente visto na figura 6.1 (com respeito à energia ganha), na figura 6.5 há pouca diferença entre as curvas obtidas da taxa de sobrevivência para cada combinação de μ 's. O diferencial está justamente na situação onde há baixíssimas densidades de alvos, onde o caso superdifusivo consegue garantir a sobrevivência de alguns buscadores, ou seja, levando $\Gamma(z^2, t) > 0$. Nesse sentido, o comportamento qualitativo da taxa de sobrevivência indica que também há uma transição de fase em torno de um ponto crítico, onde os valores de ρ_c para várias combinações μ_s e μ_t , giram em torno de $\rho \approx 0,591$.

Esses resultados iniciais indicam que transições de fase também podem emergir em ambientes bidimensionais, possibilitando a caracterização dos expoentes críticos assim como foi realizado para buscas unidimensionais. Uma vez que o comportamento da taxa de

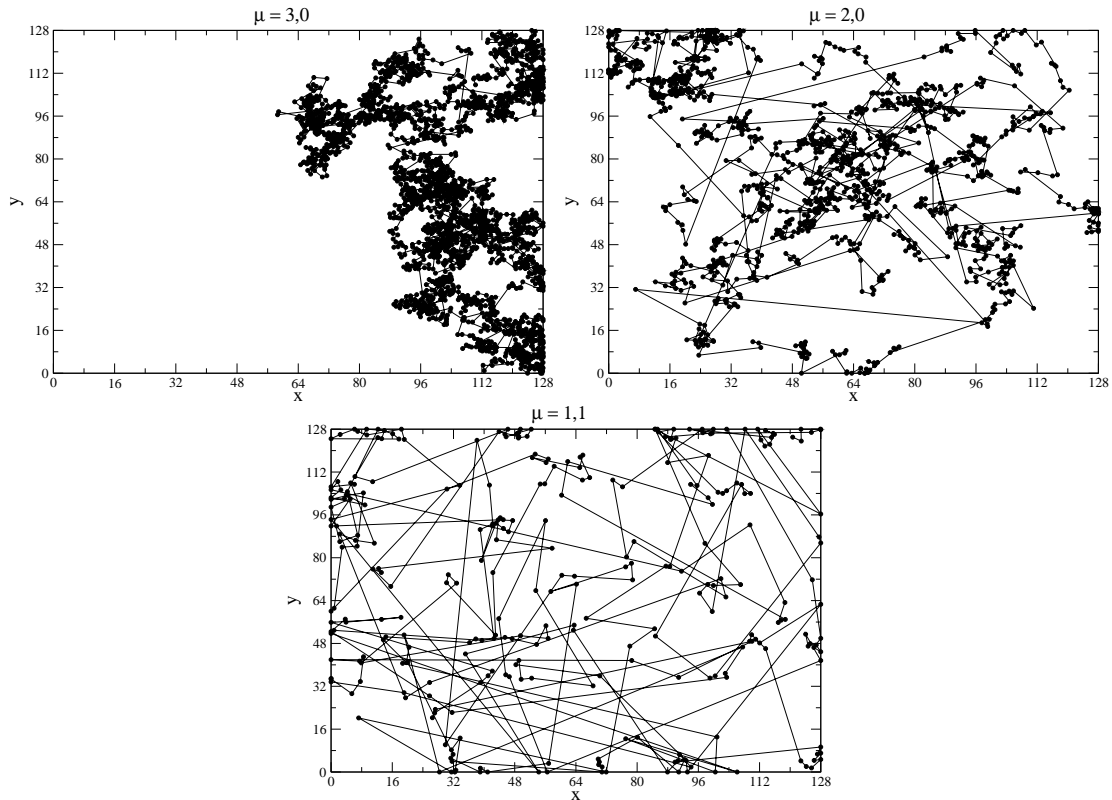


Figura 6.4: Caminhada 2D para os casos $\mu = 3,0$, $\mu = 2,0$ e $\mu = 1,1$ considerando uma rede quadrada 128×128 . Nota-se que o caso balístico visita muito mais regiões na rede quando comparado ao caso browniano.

sobrevivência e a localização dos pontos críticos são semelhantes para diferentes estratégias de caminhada, espera-se que tais possíveis transições dependam ainda menos dos valores μ_s e μ_t adotados, e sejam ainda menos sensíveis aos parâmetros energéticos do sistema, tal como a energia inicial, o custo por passo realizado e o ganho de energia por alvo encontrado. Além disso e sobretudo, é muito provável que o raio de visão de buscador passe a ser uma quantidade bastante interessante a ser analisada, visto que ela pode compensar a sensibilidade da dimensão do espaço de busca.

6.4 A Física de Movimentos Ecológicos: Considerações Finais

A conexão entre o modelo de buscas aleatória apresentado neste e nos capítulos anteriores com os processos de movimento ecológico propriamente dito e presentes na natureza, se faz através da quantidade Taxa de Sobrevivência que fornece uma apropriada descrição de tais fenômenos críticos nas proximidades da transição, sendo governada essencialmente pela estratégia de busca adotada para a procura por alimentos, conforme defende a *Teo-*

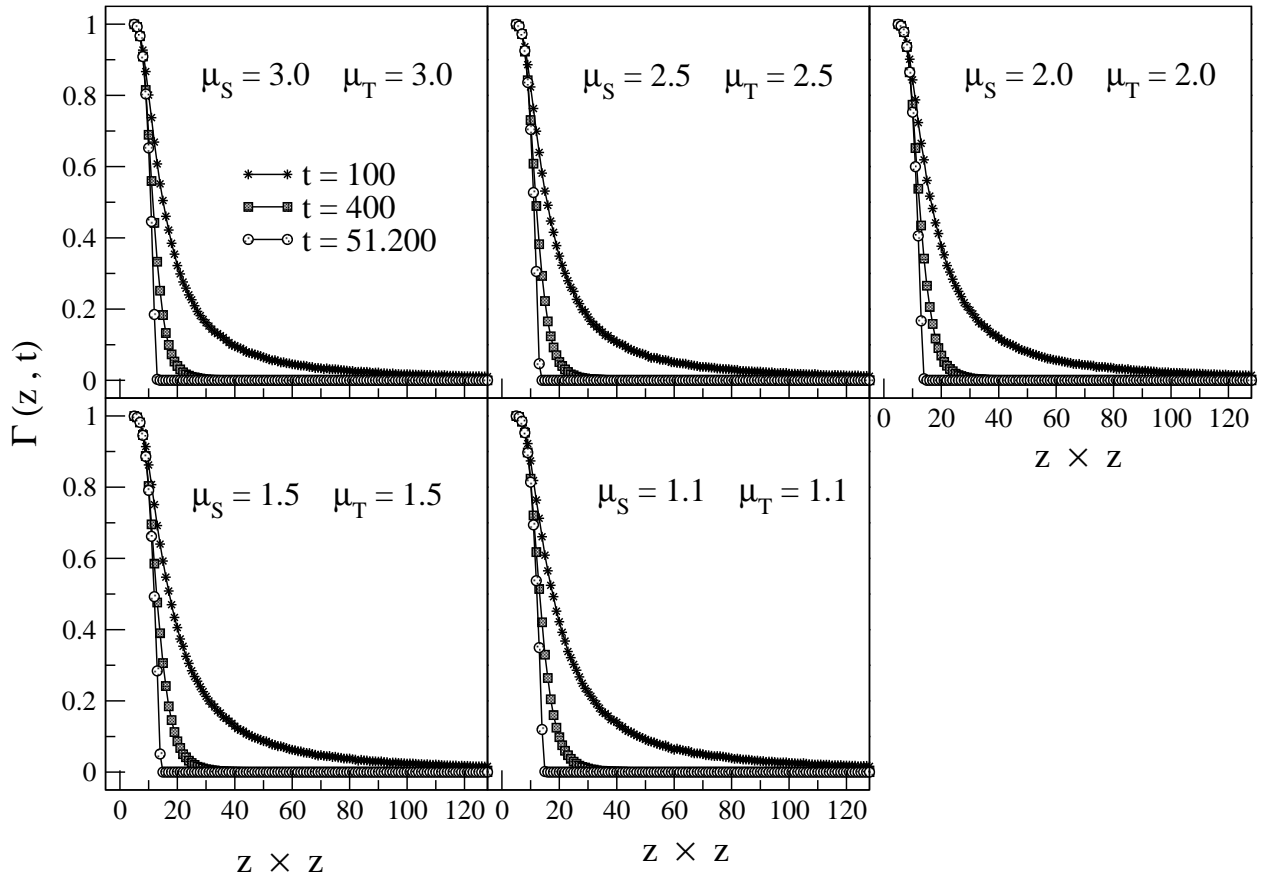


Figura 6.5: Taxa de sobrevivência vs. área de busca para alguns valores de μ_s e μ_t . Cada conjunto de curva aborda três tempos de simulação: $t = 100$, $t = 400$ e $t = 51.200$.

ria Unificada do Problema de Foraging [19]. Numa visão simplista poderia-se acreditar que a solução para o problema de busca em ambientes escassos é resolvido seguindo-se unicamente os resultados obtidos, ou seja, adotar o critério de busca superdifusiva, (conforme alguns insetos demonstram fazer [115]), bastando basicamente diminuir o valor do parâmetro de difusão μ . Contudo, no mundo real dos ecossistemas, existem diversas limitações físicas [116] as quais impossibilitam o simples decréscimo de μ , levando assim uma dada espécie à extinção se a mesma estiver sob situações críticas de sobrevivência. Ainda que as limitações sejam impostas, é possível que alguns organismos buscadores sobrevivam numa situação crítica durante um certo tempo t_e devido aos efeitos de flutuações inerentes a fenômenos físicos. Evidentemente, se $t_e \rightarrow \infty$ a espécie como um todo irá para a extinção. Todavia, o tempo no qual um sistema permanece em estado crítico é em geral finito, resultado de combinações naturais das condições do meio que envolvem o sistema (por exemplo, condições de escassez apenas em determinados períodos do ano, ciclos de eras glaciais etc). Ainda que t_e seja grande, processos de seleção natural (adaptação na escolha de μ) ou eventos naturais como regeneração de recursos alvos ou mecanismos de reprodução, podem fazer com que uma determinada espécie escape das regiões críticas se o tempo de recuperação t_c é curto o suficiente. De forma geral, esperamos que a razão

entre o tempo de sobrevivência em momentos críticos t_e com o tempo de duração da situação adversa t_c , passa a ser um importante indicador de decaimento ou crescimento populacional em condições extremas no processo de buscas por alimento [46]. Em linhas gerais, t_e/t_c torna-se um elemento chave na manutenção (ou não) da espécie, onde fatores biológicos, climáticos etc (determinando t_c) confrontam-se com aspectos estocásticos (determinando t_e) [117]. Tais mecanismos devem ser levados em conta quando consideramos processos de seleção natural.

Alguns estudos têm argumentado que além dos mecanismos relacionados à reprodução e crescimento populacional, as buscas por alimento são geradoras de pequenas perturbações em ecossistemas variados e complexos [118]. Esse processo de busca é justamente o que trata o modelo nesta tese. Entretanto, apesar de termos um modelo bastante simplificado por não considerar fatores biológicos fundamentais como reprodução, crescimento, adaptação, entre outros, nenhum outro modelo até então tem sido suficientemente completo ao ponto de descrever tais dinâmicas do ponto de vista realista. No mínimo, temos um modelo que descreve alguns importantes resultados de processos de buscas aleatórias de Lévy, tal como a determinação da melhor estratégia de busca em função da densidade de alvos e da confirmação de transições de fase decorrentes de fenômenos críticos oriundos da limitação de recursos. Embora bastante simplificado, nossos resultados apontam para a importância de flutuações estatísticas em processos biológicos e suas consequências para a manutenção de biodiversidade.

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho apresentamos inicialmente o problema e as motivações de estudos em torno do problema da busca aleatória (*foraging problems*), dando ênfase ao fato de que poucos estudos até então foram feitos considerando a dinâmica do alvo concomitantemente à dinâmica do buscador. Antes de iniciar as discussões sobre os resultados obtidos nesta tese, fizemos uma breve revisão da literatura específica que envolve a física de buscas aleatórias, ressaltando a importância do teorema central do limite, as características de fenômenos críticos e as transições de fase em geral. Esses conceitos foram importantes para a devida compreensão e análise dos resultados obtidos através das simulações numéricas em torno do problema.

Uma vez que o modelo de buscas em redes unidimensionais foi apresentado, tornou-se possível constatar que a distribuição do comprimento das caminhadas a serem realizadas são equivalentes para redes discretas e contínuas, assim podendo generalizar os resultados para uma situação típica dos parâmetros energéticos (energia inicial $\xi_0 = 100$, ganho por encontro $g = 100$ e custo por passo $\alpha = 1$). Com isso, verificamos que o comportamento balístico $\mu_s = \mu_t = 1,1$ fornece uma vantagem na energia líquida em regime de baixas densidades de alvos, possibilitando afirmar que buscas superdifusivas são mais eficientes do que buscas brownianas no limite de ambientes escassos de recursos quando estes são destrutíveis. Também foi apresentada a quantidade taxa de sobrevivência Γ , como uma candidata a descrever e caracterizar as transições de fase que surgem no processo de buscas aleatórias, portanto sendo caracterizada como o parâmetro de ordem da transição.

Constatamos que tais transições de fase apresentam um comportamento contínuo na passagem de uma fase (sobrevivência) para outra (extinção). Para uma apropriada caracterização dessas transições, foi feita uma análise de escala junto à teoria de renormalização numérica fenomenológica, objetivando calcular os valores dos expoentes críticos associados à transição. Nesse sentido, os expoentes $\beta \approx 0,42$ e $\nu_{\parallel} \approx 0,57$ foram obtidos para

várias estratégias ou combinações de caminhada μ_s e μ_t (fixado os parâmetros energéticos $\xi_0 = 100$, $\alpha = 1$ e $g = 100$) apresentando aproximadamente os mesmos valores independente dos pares de difusão adotados na busca. Um terceiro expoente foi sugerido como sendo a distância média percorrida após um tempo t , motivado e se fazendo análogo a um comprimento de correlação na região crítica das transições, cujo expoente $\nu_{\perp} \approx 1,096$ foi obtido para várias estratégias de busca e seu valor foi aproximadamente igual para qualquer combinação de $\mu_{s,t}$. Como consequência direta, foi sugerido que os conjuntos de expoentes críticos β , ν_{\parallel} e ν_{\perp} formam uma classe de universalidade, por independender do tipo de caminhada adotada pelo buscador ou alvo nas regiões críticas. Constatou-se que tais expoentes se assemelham aos expoentes da classe de universalidade de percolação direcionada com parede, indicando que buscas aleatórias e percolação direcionada estão de certa forma relacionadas. Nesse contexto, uma proposta de mapeamento foi apresentada com vista no objetivo de interligar as quantidades e resultados de ambos os modelos (*random walk* - *RW* e *directed percolation with wall*), explorada no apêndice C desta tese. Também foi apresentado um caso particular da dinâmica de busca, aplicada a alvos estáticos, cujo parâmetro de ordem e expoentes críticos mostraram um comportamento similar ao caso de alvos dinâmicos, assim direcionando esse caso particular também para a mesma classe de universalidade DP.

Visando compreender os limites comportamentais das transições de fase, foi variado o conjunto de parâmetros energéticos no sistema. Constatou-se que a variação da energia inicial (fixados α e g) tem o papel de aumentar ou diminuir o tempo de autonomia inicial de caminhada (τ). A depender do conjunto de parâmetros, verificou-se que o modelo de buscas contínuas pode melhorar os valores calculados para os expoentes críticos. Também foi observado que o aumento do custo energético diminui significativamente os valores de densidades críticas, cujas regiões são sensíveis às variações do ambiente de busca (tamanho da rede). Interpretação similar também é válida para o caso onde a energia inicial cresce, mantidos fixos α e g . A partir daí, tanto para o efeito do ganho energético g , quanto para a variação do tempo de autonomia inicial da dinâmica de busca, foram calculados os expoentes críticos β e ν_{\parallel} das transições. Nesse sentido, os resultados indicam que os expoentes críticos dependem do tipo de conjunto de parâmetros energéticos adotados, e permanecem inalterados caso a variação de tais parâmetros ocorra de forma proporcional. Quanto às densidades críticas, foi visto que elas dependem apenas da razão g/α , ou seja, do quanto se ganha pelo quanto se perde de energia. Com estas análises, torna-se possível sugerir que os parâmetros energéticos têm papéis relevantes na dinâmica do sistema (ou seja, nas transições de fase), podendo influenciar nos valores críticos, consequentemente na classe de universalidade do modelo à partir dos parâmetros típicos adotados, levando ao surgimento de classes de universalidade.

Por fim, mostramos alguns resultados iniciais de buscas em ambientes 2D, nos quais o

comportamento da energia e da taxa de sobrevivência indicam fortemente a existência de transições de fase também nessa dimensão de busca. Os resultados também mostraram que o processo de busca é menos sensível às mudanças em μ_s e μ_t , uma vez que as regiões críticas, em muitos dos pares de caminhada adotados, apresentam as mesmas densidades críticas.

Em suma, destaca-se que as transições de fase em buscas aleatórias fornecem uma nova abordagem importante à compreensão de fenômenos críticos associados ao mecanismo de busca em condições escassas de recursos de interesse, onde as características dinâmicas dos parâmetros energéticos inerentes ao sistema, bem como as estratégias que guiam as buscas, são fatores fundamentais para a garantia de sucesso e sobrevivência de uma dada espécie.

Os estudos abordados nesta tese sugerem várias perspectivas de trabalhos futuros, tais como:

1. Fazer a associação entre processos de buscas aleatórias e Teoria de Jogos, com o objetivo de analisar o comportamento da dinâmica quando uma terceira espécie é inserida no sistema. Tais estudos seriam direcionados para a resposta da pergunta: *qual é a estratégia de caminhada mais eficiente que garante a sobrevivência quando é necessário capturar um tipo de alvo A e escapar de um predador B?*
2. Otimizar o algoritmo de busca de forma que seja possível fazer simulações para maiores valores de tempo de caminhada t , gerando um menor tempo de processamento computacional, buscando melhorar os valores calculados dos expoentes críticos;
3. Explorar os resultados oriundos do modelo de buscas no espaço contínuo, visando calcular os expoentes críticos mesmo nas situações onde a região crítica é sensível à variação dos comprimentos de rede simulados. Dessa forma será possível calcular os expoentes críticos para quaisquer combinações de parâmetros energéticos, associando tais expoentes as suas respectivas classes de universalidade;
4. Analisar os efeitos de velocidade de locomoção e do raio de visão na dinâmica de busca, motivado no fato de que muitas espécies de animais apresentam diferentes velocidades de captura, bem como distintos raios de visão no qual o alvo é detectado;
5. Calcular os expoentes críticos para o processo de busca 2D, comparando tais expoentes para diferentes condições de contorno;
6. Caracterizar as quantidades oriundas do processo de percolação no contexto de buscas aleatórias, assim calculando os expoentes críticos associados às configurações

dos clusters formados na rede, possibilitando a comparação de tais expoentes com os obtidos nesta tese. Assim o mapeamento Percolação Direcionada - Busca Aleatória poderá ser finalizado.

O Método de Inversão

O *método da inversão*¹ tem como finalidade dar o suporte matemático para corretamente gerar o comprimento dos passos sorteados pelo buscador e alvos durante a dinâmica de busca. Ele tem como base as conceitos fundamentais das leis de probabilidade, dentre os quais encontramos aquele que dá a ferramenta matemática para gerar valores aleatórios a partir de uma distribuição arbitrária de interesse que os governam. Basicamente o método trabalha com as transformações inversas de funções ou distribuições. Para tanto, é necessário lembrar alguns conceitos elementares de transformações inversas, tal como vemos a seguir.

Duas funções f e g são inversas uma da outra se, e somente se, $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$. Nesse caso, denotamos g como f^{-1} como sendo a inversa de f . É importante salientar que nem toda função f tem sua respectiva inversa f^{-1} . Mas uma vez provado que a função inversa de $y = f(x)$ existe, podemos determiná-la simplesmente fazendo x em função de y . Por exemplo, para $y = f(x) = ax + b$, então $x = (y - b)/a$ e $f^{-1}(y) = (y - b)/a$. Como x é uma variável independente, então a função inversa de $f(x)$ é $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ para todo $a \neq 0$. Compreendido o conceito de função inversa, seguimos para o método.

Seja uma função distribuição de probabilidade uniforme $p(x)$ tal que:

$$p(x)dx = \begin{cases} dx, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad (\text{A.2})$$

O objetivo é transformar $p(x)$ numa distribuição de probabilidade não-uniforme $p(y)$. As leis que governam sistemas probabilísticos [66] nos garante que tal transformação é

¹O método aqui apresentado foi baseado na literatura correspondente, bem como no trabalho de Bartumeus, F. [102].

estabelecida se

$$|p(y)dy| = |p(x)dx| \longrightarrow p(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \quad (\text{A.3})$$

Para que essa distribuição $p(y)$ seja dada por uma função $f(y)$, então:

$$f(y) = p(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \quad (\text{A.4})$$

Portanto é possível relacionar uma variável aleatória x de uma função distribuição $p(x)$ com uma variável aleatória y da função de distribuição $p(y)$. Considerando que x é uma variável distribuída de forma uniforme no intervalo $[0, 1]$ e $p(x)$ é uma constante, então:

$$f(y) = \frac{dx}{dy} \quad (\text{A.5})$$

que tem como solução

$$x = F(y) = \int_{-\infty}^y f(z)dz \quad (\text{A.6})$$

A equação acima nos diz que: dada uma variável aleatória x , então obtemos uma outra variável aleatória y . Assim, se $x = F(y)$ então precisamos apenas calcular a sua inversa F^{-1} para obtermos y em função de x , ou seja:

$$y(x) = F^{-1}(x) \quad (\text{A.7})$$

que existirá se conseguirmos calcular a integral em [A.6](#) e a função inversa em [A.7](#). Em suma, o método da inversão para gerar variáveis aleatórias a partir de uma dada distribuição de probabilidade $p(x)$, é baseado nos passos:

1. Calcular a função distribuição normalizada de $p(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (\text{A.8})$$

2. Calcular a função cumulativa para uma certa variável x :

$$u(x) = \int_{x_{min}}^x p(y)dy \quad (\text{A.9})$$

onde $x_{min} \leq y < x$ e $0 \leq u(x) \leq 1$.

3. Por fim, obter a inversa de $u(x)$, $x = F^{-1}(u)$

Aplicando o método para a nossa função distribuição de interesse $p(\ell) = \ell^{-\mu}$ (que nesse caso é uma função tipo *lei de potência* com expoente $-\mu$), poderemos gerar comprimentos

de passos ℓ aleatórios conforme a distribuição $p(\ell)$. Para esse caso, é importante notar que a função distribuição tem um limite inferior em $\ell = 1$, visto que para todo $\ell < 1$, a função diverge de tal forma que a impossibilita de ser normalizada. Assim,

$$\int_1^\infty \beta \ell^{-\mu} d\ell = 1 \quad (\text{A.10})$$

onde β é uma constante que torna $p(\ell)$ normalizada (conforme o passo 1 do método). Resolvendo, temos:

$$\begin{aligned} \beta \frac{\ell^{-\mu+1}}{-\mu+1} \Big|_1^\infty &= 1 \\ \beta \left[\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\frac{\ell^{-\mu+1}}{-\mu+1} - \frac{1}{-\mu+1} \right) \right] &= 1 \\ \frac{\beta}{-\mu+1} \left[\lim_{\ell \rightarrow \infty} \ell^{-\mu+1} - 1 \right] &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

O limite na equação acima existe somente se $\mu > 1$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{-\mu+1} [0 - 1] &= 1 \\ \beta &= \mu - 1 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Dessa forma obtemos a $F(\ell)$. Logo,

$$\begin{aligned} F(\ell) &= \int_1^\ell (\mu - 1) \ell^{-\mu} d\ell = (\mu - 1) \int_1^\ell \ell^{-\mu} d\ell \\ &= (\mu - 1) \left[\frac{\ell^{1-\mu}}{1-\mu} \right]_1^\ell \\ &= \frac{-(1-\mu)}{1-\mu} [\ell^{1-\mu} - 1] \\ &= 1 - \ell^{1-\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Assim,

$$u(\ell) = F(\ell) = 1 - \ell^{1-\mu} \quad (\text{A.14})$$

onde $u(\ell)$ acima tem o mesmo comportamento estatístico para

$$u(\ell) = \ell^{1-\mu} \quad (\text{A.15})$$

e finalmente,

$$\ell = u(\ell)^{1/(1-\mu)}, \quad \text{para } \mu > 1 \quad (\text{A.16})$$

onde $u(\ell)$ é justamente uma variável aleatória distribuída no intervalo $[0, 1]$.

Na prática, essa é a equação usada para gerar os passos aleatórios dos caminhantes, cujo comportamento de difusão vai depender do expoente μ adotado. Importante observar a necessidade de $\mu > 1$ para que a distribuição de passos seja normalizada, além da simplicidade e elegância que a equação 2.35 tem para gerar caminhadas que vão desde o comportamento browniano $\mu \geq 3$ até o movimento balístico $\mu \rightarrow 1^+$.

O Algoritmo de Busca

Os algoritmos de buscas são fundamentalmente guiados pela dinâmica do modelo de caminhada do buscador e do alvo. Entretanto, a correta implementação de tal modelo na forma de códigos computacionais, exige um cuidado em relação à lógica que governa as equações de movimento, tal que todas as possibilidades de caminhadas tanto do buscador quanto do alvo, devem ser levadas em consideração. No caso unidimensional, tais relações e possibilidades tornam-se um pouco mais simples porque o movimento se faz ao longo de uma linha reta, e portanto as equações de movimento (tomando velocidades constantes, conforme o modelo) são lineares e a função distância entre os organismos depende linearmente do tempo. Já no caso 2D, apesar de também existir uma equação de movimento linear com o tempo, a função distância entre os organismos não dependem mais linearmente com t , e sim parabolicamente. Isso induz numa maior complexidade de análises de encontros, principalmente quando as condições de contorno são levadas em consideração. Afim de apresentar as principais observações à respeito desses processos de buscas, as sessões a seguir abordam algumas dessas condições efetivas de forma que a dinâmica siga fielmente o modelo proposto.

B.1 Dinâmica 1D

Antes de iniciar a construção algorítmica na situação 1D, vale relembrar as regras de movimento para esse caso:

1. Simulação considerando dois caminhantes aleatórios - buscador e alvo - com velocidades escalares constantes e idênticas $v_b = v_a = 1$, sob condições periódicas de contorno, cujo comprimento dos passos é calculado através da equação,

$$\ell_j \sim u_j^{1/(1-\mu)} \tag{B.1}$$

onde u_j é uma variável aleatória distribuída no intervalo $(0,1)$ e μ é o parâmetro de difusão que caracteriza o tipo de caminhada dos organismos, indo desde caso browniano $\mu \geq 3$ até o caso balístico $\mu \rightarrow 1^+$;

2. Assim, o buscador e o alvo iniciam numa posição aleatória x_i^b e x_i^a de uma rede de tamanho z ;
3. De forma aleatória, o buscador e o alvo escolhem um sentido de movimento com probabilidade $1/2$ de ir para a direita $v_{a,b}+$ ou para esquerda $v_{a,b}-$. É escolhido um tamanho de caminhada para o buscador e para o alvo (τ_b e τ_a respectivamente), obedecendo a condição $r_v < \tau_{a,b} \leq z/2$;
4. Uma energia ξ é associada à dinâmica do buscador, possibilitando analisar o custo energético de locomoção durante o processo de busca. Inicialmente temos $\xi = \xi_0$ e a cada caminhada j executada, o buscador perde uma energia α_j . Aqui assumimos que $\alpha_j = \alpha \ell_j$, onde α é uma constante, ou seja, o custo energético é diretamente proporcional ao quanto se locomove;
5. O buscador verifica a possibilidade de encontro com alvo durante o seu deslocamento até chegar em x_f^b , estipulado por τ_b . Não ocorrendo encontro, a etapa de escolha de direção e comprimento de caminhadas é reiniciada;
6. Caso ocorra um encontro, então uma energia g é somada a $\xi(t)$, uma nova configuração de movimento é escolhida e um novo alvo surge numa posição aleatória da rede, tal que $x_i^a \notin [x_i^b - r_v, x_i^b + r_v]$, para que não ocorra absorção energética do buscador sem ao mínimo ter uma dinâmica de movimento de 1 passo no sistema, fornecendo portanto dinamicidade ao modelo.

Estabelecidas as regras de movimento, em t_0 teremos x_i^b , x_i^a , τ_b e τ_a de maneira que,

$$x^b = x_i^b + v_b t \quad (\text{B.2})$$

$$x^a = x_i^a + v_a t \quad (\text{B.3})$$

são as equações de movimento de buscador e do alvo. $v_{b,a} = +1$ se o movimento é para a direita e $v_{b,a} = -1$ para esquerda. E,

$$x_f^b = x_i^b + v_b \tau_b \quad (\text{B.4})$$

$$x_f^a = x_i^a + v_a \tau_a \quad (\text{B.5})$$

são as posições finais respectivamente do buscador e do alvo. A partir dessas equações, a dinâmica é iniciada.

Para que sejam analisados os processos de encontros via equação de movimento, é necessário considerar o menor dos tempos τ_b ou τ_a para que as equações de movimento possam ser analisadas. Definiremos esse menor dos tempos como sendo \tilde{t} . Um detalhe importante é que depois de um certo tempo t de simulação, ao entrar na rotina de condição de contato, é necessário verificar se $t + \tilde{t}$ é maior do que o t_{max} estipulado para a simulação. Se assim ocorrer, \tilde{t} é automaticamente reconfigurado como sendo $\tilde{t} = t_{max} - t$. Observado esse detalhe, o próximo passo é analisar o sentido do movimento dos caminhantes. Assim, as possibilidades são:

1. Se (v_b+, v_a+) ou (v_b-, v_a-) , então não há encontro porque ambos estão caminhando num mesmo sentido;
2. Se (v_b-, v_a+) e $x_i^b > x_i^a$, então é possível ter encontro. Utilizando as equações de movimento, tal encontro irá acontecer se

$$(x^b - x^a) = r_v \quad (\text{B.6})$$

Ou seja:

$$t = \frac{(x_i^b - x_i^a) - r_v}{2} \quad (\text{B.7})$$

Logo, se $t \leq \tilde{t}$, então ocorrerá encontro entre buscador e alvo.

3. Se (v_b+, v_a-) e $x_i^b > x_i^a$, também é possível ocorrer encontro devido às condições periódicas da rede. O tempo de encontro será na condição

$$x^b - x^a = z - r_v \quad (\text{B.8})$$

que resulta em:

$$t = \frac{z - (x_i^b - x_i^a) - r_v}{2} \quad (\text{B.9})$$

De forma análoga ao item anterior, se $t \leq \tilde{t}$, então ocorrerá encontro entre buscador e alvo.

4. Se (v_b+, v_a-) e $x_i^a > x_i^b$, ou, (v_b-, v_a+) e $x_i^a > x_i^b$, casos de possível encontro, onde t é analisado conforme itens anteriores.

Para os casos onde há encontro, novas direções e tamanhos de caminhada τ são sorteados. Caso não existam os encontros, então uma nova configuração caminhada é fornecida para o organismo que gerou \tilde{t} , enquanto que o outro organismo continua com sua configuração de movimento descontado o tempo \tilde{t} do seu respectivo tempo total.

Com uma certa frequência de tempos k , a simulação é “congelada” para averiguação da energia do buscador em k , ou seja, $\xi(k)$. Ao final de um t_{max} , um conjunto de valores

$\xi(k)$ é formado, fazendo sentido à evolução energética do buscador. Esse procedimento é realizado para cada tamanho de rede no intervalo de altas até baixas densidades, gerando conjuntos $\xi(k, z)$. Para que haja uma análise estatística dos dados energéticos ou para determinar uma taxa de sobrevivência dos buscadores, é necessário realizar o procedimento para M processos de busca, assim gerando as quantidades $\langle \xi(z, t) \rangle$ e $\Gamma(z, t)$. Por sua vez, a estatística de $\Gamma(z, t)$ é obtida após a realização de R repetições de todo esse procedimento. Nos resultados obtidos nessa tese, assumimos $t_{max} = 51200$, $M = 10^4$ e $R = 10^2$.

B.2 Dinâmica 2D

Semelhante ao caso 1D, consideramos a caminhada aleatória de um buscador e um alvo, ambos com velocidades constantes e unitárias. O ambiente de busca ocorre numa rede quadrada $z \times z$, onde as bordas da rede são levadas em consideração. O valor sorteado do tamanho das caminhadas também é obtido através da distribuição de Lévy $\ell_j \sim u_j^{1/(1-\mu)}$. A dinâmica de caminhada nessa dimensão seguem as regras:

1. Buscador e alvo iniciando em posições (x_i^b, y_i^b) e (x_i^a, y_i^a) aleatórias da rede quadrada $z \times z$;
2. Aleatoriamente, o buscador e o alvo escolhem um sentido de movimento (podendo ser qualquer valor no intervalo $[0, 2\pi]$ e um tamanho do voo τ_b e τ_a ;
3. A cada voo j executado, o buscador perde uma energia α_j proporcional à distância viajada.
4. O buscador, durante o voo, verifica se o alvo está em seu raio de visão r_v . Se nenhum alvo for detectado depois de τ_b , então o buscador retorna ao passo 2;
5. Se o alvo for detectado, então ele é eliminado e o buscador ganha uma energia constante g e retorna ao passo 2. A partir daí um novo alvo é criado na rede, de forma que (x_i^a, y_i^a) não pertença à região circular r_v do buscador, ou seja, $x_i^{2,b} + y_i^{2,b} = r_v^2$;
6. Se o buscador ou o alvo, durante a caminhada, intercepta alguma borda ou vértice da rede, então a caminhada é truncada. Uma nova configuração de movimento é estabelecida, de forma a não ter movimentos fora da rede.

Assim, inicialmente temos:

Buscador - localização (x_i^b, y_i^b) , comprimento τ_b , velocidade v_b e direção de movimento θ^b

Alvo - localização (x_i^a, y_i^a) , comprimento τ_a , velocidade v_a e direção de movimento θ^a

E as posições finais:

$$\text{Buscador: } \left\{ \begin{array}{l} x_f^b = x_i^b + \tau_b \cos \theta^b \\ y_f^b = y_i^b + \tau_b \sin \theta^b \end{array} \right\} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{Alvo: } \left\{ \begin{array}{l} x_f^a = x_i^a + \tau_a \cos \theta^a \\ y_f^a = y_i^a + \tau_a \sin \theta^a \end{array} \right\} \quad (\text{B.11})$$

E as equações de movimento:

$$\text{Buscador: } \left\{ \begin{array}{l} x^b = x_i^b + v_b \cos(\theta^b) t \\ y^b = y_i^b + v_b \sin(\theta^b) t \end{array} \right\} \quad (\text{B.12})$$

$$\text{Alvo: } \left\{ \begin{array}{l} x^a = x_i^a + v_a \cos(\theta^a) t \\ y^a = y_i^a + v_a \sin(\theta^a) t \end{array} \right\} \quad (\text{B.13})$$

Análogo ao caso 1D, para fazer as análises de encontro é necessário tomar o menor tempo entre τ_b e τ_a , ou seja, \tilde{t} . Nesse tempo, cada organismo terá um deslocamento linear na rede e proporcional ao tempo, de modo que a distância entre ambos em função do tempo é dada por:

$$d_{b,a}(t) = \left\{ [x^b(t) - x^a(t)]^2 + [y^b(t) - y^a(t)]^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{B.14})$$

Logo, a distância entre buscador e alvo pode ser definida da forma $f(t) \equiv d_{b,a}^2(t)$ tal que:

$$f(t) = at^2 + bt + c \quad (\text{B.15})$$

onde a , b e c são constantes obtidas a partir da Eq. B.14. Então precisamos responder à pergunta: *a distância entre o alvo e o buscador pode ser igual ou menor que r_v no intervalo de tempo $[0, \tilde{t}]$?* Se esse tempo existir, o definiremos como t^* . Definindo $\gamma \equiv r_v^2$ o problema matemático passa a ser:

\implies *Seja a função $f(t) = at^2 + bt + c$ no limite de $t \in [0, \tilde{t}]$. Assumindo $\gamma \geq 0$, existe um $t = t^*$ tal que $f(t^*) \leq \gamma$ com $0 \leq t^* \leq \tilde{t}$?*

A solução desse problema baseia-se nas propriedades elementares de funções quadráticas, onde $f(t)$ é uma parábola. Logo, para algumas análises das constantes a , b e c , é possível saber as condições onde há ou não há solução para o problema. De posse de tais condições, o código computacional é construído. Algumas informações, contudo, são importantes:

- Para cada direção e comprimento de voo escolhido, é necessário saber se a posição final do caminhante está para além dos limites da rede. Nesse caso, se faz necessário limitar a trajetória até a borda da rede, portanto truncando a caminhada nesse limite;
- A descrição do algoritmo até aqui abordou apenas 1 buscador e 1 alvo. Entretanto é possível realizar esse mesmo mecanismo com 1 buscador e vários alvos, com o cuidado de guardar as informações de estado de cada organismo dinâmico na rede. Nesse caso, o procedimento a ser tomado é:
 - Dentre todos os organismos que estão caminhando, definir \tilde{t} como a menor distância viajada por um dos organismos.
 - No intervalo de tempo $0 \leq t \leq \tilde{t}$, para cada alvo n determinar se há contato com o buscador.
 - Caso positivo, determinar os valores t^* e fazer a captura do alvo que apresenar o menor t^* , ou seja, capturar o que se encontra mais próximo.
 - Ao passo que um alvo é capturado, os demais alvos continuam a caminhar na rede.
 - Executar este procedimento até que um tempo máximo seja estabelecido, gerando de tempos em tempos as quantidades de interesse.

Em resumo são esses os algoritmos associados ao modelo de busca. A implementação dos mesmos, através da linguagem computacional *FORTRAN* ou *C*, por exemplo, origina a edição de algumas centenas de linhas de códigos, decorrentes das várias combinações e condições possíveis de movimento dos organismos na rede. Apesar da complexidade de implementação, os algoritmos supracitados possibilitam gerar variantes de movimento no modelo de busca, tal como variar os parâmetros energéticos (capítulo 6) ou, como perspectiva de trabalho, variar o raio de visão como uma lei de potência e modelar caminhadas não-markovianas.

Uma Proposta de Mapeamento: Busca Aleatória \Rightarrow Percolação Direcionada

C.1 Um Breve Resumo da Teoria de Percolação

A teoria de percolação, além de ser uma importante área em fenômenos críticos e transições de fase, tem como base apenas argumentos probabilísticos. Inicialmente, entender como um “fluido” se desloca ao longo de um “meio” [119], tornou-se uma das grandes motivações consequentes dessa teoria. Exemplos mais práticos estão relacionados ao estudo da propagação da água deslocando óleo em rochas porosas, ou da propagação e interconexão de fissuras e rupturas em rochas e materiais de engenharia. Dentro dessa linha de aplicações, um ramo bastante estudado da teoria é a Percolação Direcionada (*Directed Percolation* - *DP*), onde o sentido de propagação se faz numa determinada direção, ou seja, uma variante anisotrópica da teoria de percolação usual. Muitas são as aplicações nesse caso, tal como processos epidêmicos [120], colapsos em polímeros ramificados [121], evolução galáctica [122] etc.

Basicamente a definição de percolação é da seguinte forma: seja uma rede n -dimensional composta por sítios que podem estar no estado ativo (“ocupado”) ou no estado inativo (“vazio”). A probabilidade de cada sítio estar ativo chamamos de p (probabilidade de ocupação) e independe do estado dos sítios vizinhos. Dessa forma, o conjunto de sítios vizinhos ocupados denomina-se como um *cluster*, ou seja, uma região composta por sítios ativos. Nos casos extremos, podemos esperar que para $p \rightarrow 0$ ($p \neq 0$), praticamente só temos sítios ativos que estão isolados e, portanto, não formam *clusters*. Se $p \rightarrow 1$ ($p \neq 1$), observa-se muitos sítios ocupados, formando *clusters* que se estendem (ou seja, que percolam) por toda a rede. A figura C.1 ilustra dois exemplos onde ocorre (ou não) a percolação. Se p varia no intervalo $[0, p_c)$ poderá haver formação de *clusters* mas não o suficiente para

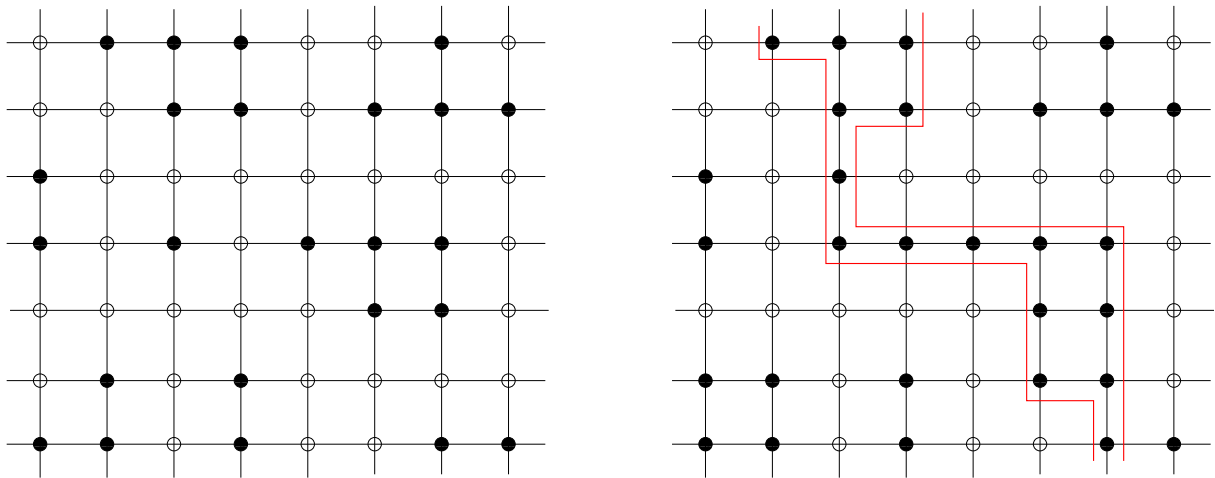


Figura C.1: Nesta figura podemos ver o caso onde não há percolação (figura à esquerda) e onde há percolação (figura à direita) em uma rede quadrada finita 8×8 . Em ambas as figuras existem mais de 1 cluster. Mas é apenas o cluster em vermelho (formado por sítios ativos, onde cada sítio apresenta ao menos 1 sítio vizinho ativo) que consegue atravessar a rede de um lado a outro, portanto percolando.

ter uma percolação. Por outro lado, se $p \in [p_c, 1]$ há formação de *clusters* que atravessam a rede. Ao variar continuamente p , verifica-se que é justamente em p_c (probabilidade crítica de ativação dos sítios) em que ao menos 1 *cluster* percola. A transição entre as fases de percolar e não-percolar, é uma transição geométrica onde o parâmetro p_c é bem definido no limite termodinâmico, ou seja, considerando redes infinitas. Para o caso de redes finitas, é necessário se apropriar da teoria de escala e métodos de renormalização numérica para estimar o valor p_c .

Existem dois tipos básicos de percolação: a percolação por sítio (*Site Percolation*) e a percolação por ligação (*Bond Percolation*). A percolação por sítio é definida conforme discutido anteriormente (ver figura C.1, em que cada sítio da rede é ativo aleatoriamente com probabilidade p ou inativo com probabilidade $q = 1 - p$ e os *clusters* são grupos de sítios vizinhos ativos). Já na percolação por ligação, a linha que conecta dois sítios vizinhos é definida como uma ligação entre sítios na rede. Assim, cada linha pode ser uma ligação aberta (ou simplesmente existindo a ligação) ou uma linha fechada (quando não há ligação). Na figura C.2, ilustramos esse caso.

Com a definição básica estabelecida, torna-se necessário definir algumas quantidades para entender melhor a física/matемática envolvidas em tais sistemas. As principais são as seguintes:

- Número médio de s -cluster por sítio (n_s): um determinado *cluster* tem seu tamanho determinado pelo número s de sítios ativos. A razão entre o número de *clusters* de tamanho s (que é chamado de *s-clusters*) e o número total de sítios na rede, é

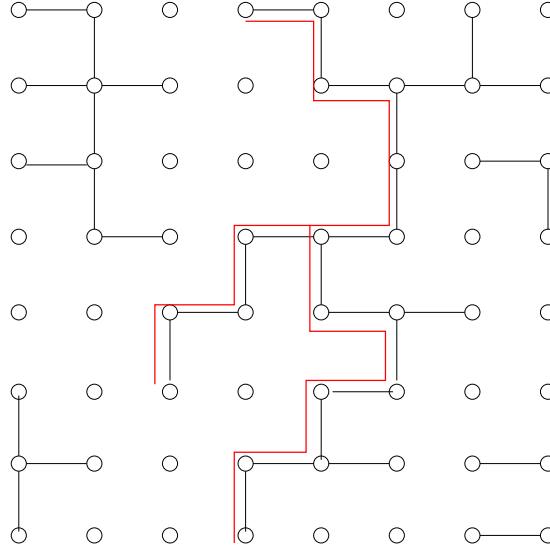


Figura C.2: Um exemplo de uma percolação por ligação - bond percolation. A percolação existe uma vez que a rede foi conectada de um extremo ao outro por ligações entre sítios, denotado pela linha em vermelho.

chamado de *cluster* número n_s que, obviamente, depende da probabilidade p de ocupação (ou ligação) dos sítios.

- Probabilidade de percolação (P): é a probabilidade de que um sítio arbitrário (ativo ou não) pertença ao *cluster* que percola pela rede, ou seja, corresponde à fração de sítios ativos (perante ao total de sítios ativos) que pertencem a tal *cluster*. Assim, espera-se que $P = 0$ para $p < p_c$. Então, a fração P_0 dos sítios ocupados que pertencem ao *cluster* que percola, é $P_0 = P/p$. Uma vez que cada sítio pode estar em três distintos estados, inativo com probabilidade $q = 1 - p$, ativo e pertencer ao *cluster* que percola com probabilidade P ou pertencer a qualquer outro *cluster* com probabilidade $p - P$, e definindo sn_s como a probabilidade de qualquer sítio pertencer a um s -*cluster*, então $\sum_s sn_s$, $s = 1, 2, \dots$ equivale justamente à $p - P$. Tendo informação de $n_s(p)$, é possível calcular $P(p)$ através de simulações computacionais utilizando o método de Monte Carlo [123]. O resultado qualitativo é representado pela figura C.3.

- Tamanho médio do *cluster* S : que pode ser obtido por

$$S = \sum_s w_s s = \frac{\sum_s s^2 n_s}{\sum_s s n_s} \quad (\text{C.1})$$

onde $w_s = sn_s / \sum_s sn_s$ corresponde à probabilidade de que um *cluster* contenha exatamente s sítios.

- Função de correlação $g(r)$: é a probabilidade de que um sítio, a uma distância r de um sítio ocupado num *cluster*, esteja também ocupado e pertença ao mesmo *cluster*.

- Comprimento de correlação ξ : que é definido como a distância média entre dois sítios pertencentes a um mesmo *cluster*, dada por $\xi^2 = \sum_r r^2 g(r) / \sum_r g(r)$.

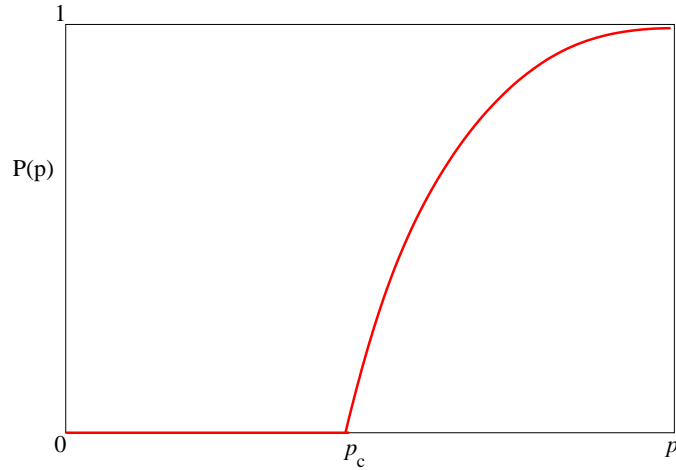


Figura C.3: Aspecto qualitativo da probabilidade de percolação P em função da probabilidade de ativação dos sítios p .

Algumas dessas quantidades estão relacionadas com o parâmetro p através de leis de escala, que são utilizadas em sistemas de tamanho finito (fora do limite termodinâmico), conforme equações 2.43 e sessão 2.6.1¹. Dessa maneira, torna-se possível estimar as probabilidades críticas p_c em que o sistema começa a percolar e os expoentes críticos associados às transições de fase para uma determinada geometria ou dimensão de rede. Como exemplo, as tabelas a seguir mostram alguns desses valores [109, 124]:

Probabilidades Críticas p_c				
	Percolação Usual		Percolação Direcionada	
Rede	<i>site</i>	<i>bond</i>	<i>site</i>	<i>bond</i>
quadrada	0,59275	0,5000	0,705489	0,644701
triangular	0,5000	0,34729	0,595646	0,478018
cúbica (SC)	0,31117	0,2492	0,435	0,383

Percolação Usual		
Expoentes	$d = 2$	$d = 3$
α	$-2/3$	-0,6
β	$5/36$	0,4
γ	$43/18$	1,8

Percolação Direcionada			
Expoentes	$d = 2$	$d = 2$ Absorvente	$d = 3$
β	0,2764	0,7338	0,59
ν_{\parallel}	1,7338	1,7339	
ν_{\perp}	1,0969	1,0969	

Tabela C.1: Probabilidades críticas para algumas geometrias de rede e expoentes críticos para $d = 2$ e $d = 3$ obtidos na percolação usual e direcionada.

¹Para mais detalhes, ver *Introduction to Percolation Theory*, Stauffer D., 1985 [124].

C.2 Percolação numa Rede Quadrada com Estado Absorvedor

Na percolação direcionada, a ligação entre dois sítios vizinhos quaisquer permite um único sentido de percurso entre ambos, sendo este direcionamento representado por uma seta. Esse sentido de direcionamento pode ser imaginado por porções de um certo fluido que, devido ao efeito gravitacional, por exemplo, fluem num meio poroso no sentido de cima para baixo. Considerando uma rede quadrada, onde tal “fluido” inicialmente encontra-se num sítio ativo arbitrário da rede em $t = 0$, dizemos que no tempo $t + 1$ existe uma probabilidade p do sítio vizinho se conectar com esse sítio ativo. Neste contexto, é conveniente desenhar a rede quadrada na forma diagonal, com a origem em um dos vértices. Essa é uma maneira fácil de visualizar a percolação direcionada por ligações numa rede quadrada. Assim, construímos linhas imaginárias, sendo a linha 0 passando pela origem da rede (único sítio, por definição ativo), a linha 1 passando pelos próximos dois sítios vizinhos, e assim sucessivamente até a N -ésima linha que contém $N + 1$ sítios na base, conforme ilustração a seguir.

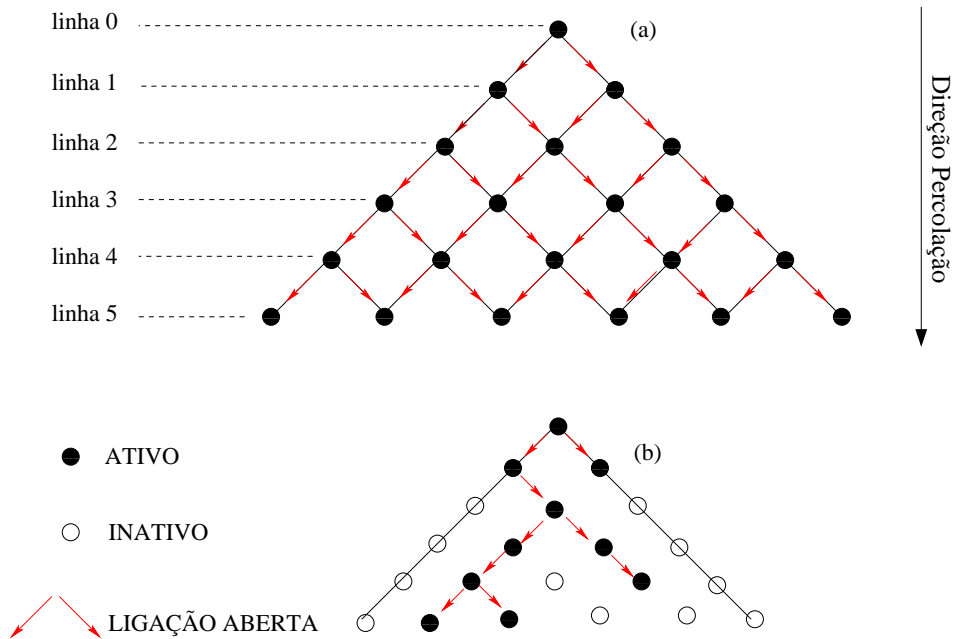


Figura C.4: Rede quadrada no forma diagonal. Um sítio na linha l apenas será ativado se houver, no mínimo, 1 sítio na linha $l - 1$ ativado. Em (a) temos o caso onde a probabilidade de conexão é máxima $p = 1$, portanto todas as ligações são abertas, formando assim um único e grande cluster. Em (b), um exemplo onde $0 < p < 1$, onde nem todas as ligações estão abertas. Nesses casos, todos os clusters formados necessariamente estão conectados à fonte/origem. A percolação existe quando há ao menos 1 cluster que vai do sítio/fonte na linha 0 até algum sítio ativo na N -ésima linha e extremo da rede.

Nesse tipo de sistema, a direção de percolação muitas vezes é considerada como a

dimensão temporal, enquanto que as demais direções compõem as dimensões espaciais. Aqui vamos considerar um sistema de dimensão $(1+1)$ [125, 126]. Nestes termos, a rede quadrada pode ser descrita por pontos no plano $t - x$ com coordenadas inteiras tal que $t \geq 0$ e $(t = 0, x = 0)$ corresponde ao ponto origem na linha 0 da figura C.4. Na linha 1 teremos 2 sítios com coordenadas $(t + 1, x \pm 1)$, linha 2 teremos 3 sítios com coordenadas $(t + 2, x \pm 2)$ mais o ponto $(t + 2, 0)$ e assim sucessivamente. Observa-se que na n -ésima linha teremos $n + 1$ sítios, cuja localização dos pontos extremos encontram-se em $[t + n, x \pm n]$ e a distância entre os demais sítios vizinhos na mesma linha sendo igual a 2 unidades de comprimento. A partir do sítio ativo no vértice origem $(0,0)$, todas as ligações têm probabilidade p de serem abertas. Nas demais linhas, a probabilidade p de uma ligação estar aberta para um dado sítio só existe se um dos sítios vizinhos na linha anterior estiver ativo. Essas regras, portanto, permite uma determinada configuração de estados ligados entre sítios numa rede quadrada diagonalizada com parâmetro de conectividade p , conforme ilustrado em (b) da figura C.4.

Uma variante dos sistemas percolativos direcionados, ocorre quando há algum processo absorvente na dinâmica do sistema. Por exemplo, podemos imaginar que um fluido percolando num dado meio, pode ser absorvido por uma impureza presente na rede, mesmo que as ligações estejam abertas para os sítios vizinhos. De forma análoga, podemos ver uma dinâmica similar em processos de reação e catálise [127, 128] e intermitência espaço-temporal [129, 130] nos quais há mecanismos absorventes com determinadas condições que impedem a ligação (percolação) entre sítios vizinhos. Uma maneira conhecida de considerar estes estados absorventes, é inserir uma “parede” no plano $t - x$ de forma que a ligação entre sítios é fechada para todo $x < 0$. Assim, todos os sítios presentes nessa parede, terão conectividade nula com os demais sítios, em outros palavras, a “fluidez” é interrompida na parede. A figura C.5 ilustra essa situação.

O interessante é que a presença da parede absorvente na dinâmica não muda a probabilidade crítica p_c , que nesse caso tem um valor aproximado de 0,644701 [109]. No entanto, alguns expoentes críticos mudam de um caso para outro. Por exemplo, o expoente β , que caracteriza a maneira como a qual o parâmetro de ordem se comporta nas proximidades do ponto crítico, apresenta o valor de 0,27647 para a dinâmica sem parede (*bulk bond percolation*) e 0,7338 para a dinâmica com parede (*with wall bond percolation*) [109].

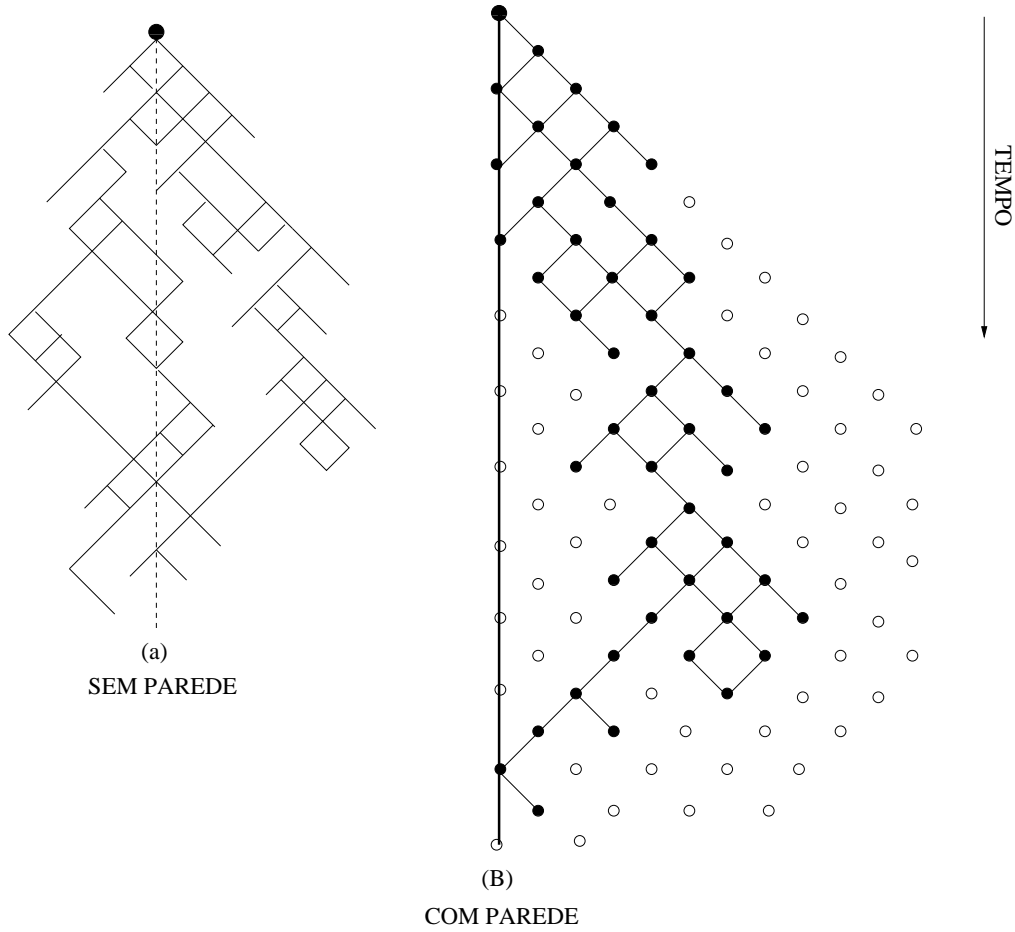


Figura C.5: Em (a) temos o mecanismo clássico da percolação direcionada para um certo valor p . Em (b) foi colocado o efeito de parede absorvente no mesmo esboço de (a). Notamos que a parede absorve todas as ligações abertas dos sítios localizados em $x = -1$, onde $(t = 0, x = 0)$ representa as coordenadas do primeiro sítio na origem.

C.3 O Mapeamento

A motivação que justifica o interesse pelo mapeamento entre os modelos de percolação direcionada e processos de buscas se origina no fato de que ambos os modelos apresentam bastante similaridade quanto aos valores dos expoentes críticos. Por esse motivo, acreditamos que mecanismos de buscas aleatórias com estados absorventes apresentam transições de fase governados por expoentes críticos pertencentes à classe de universalidade *DP - Directed Percolation*, classe que é considerada como bastante robusta por abranger diversos outros modelos e sistemas. Essa proposta de mapeamento é uma tentativa de estabelecer as relações entre as quantidades físicas em ambos os modelos e gerar um processo de percolação direcionada interpretado como um mecanismo de busca aleatória.

Consideremos o caso onde um número M de buscadores realiza a busca por alvos numa rede $1D$ com condições periódicas de contorno. Tomando como parâmetros de busca a energia inicial $\xi_0 = 100$, o custo energético por passo $\alpha = 1$ e o ganho energético

por encontro com alvo $g = 100$, e obedecendo as regras de movimento como colocadas no capítulo 3, podemos esperar as seguintes consequências após o início da dinâmica de cada buscador para uma determinada densidade de alvos λ (ou comprimento de rede z):

- No tempo inicial de autonomia de caminhada ² τ haverá duas possibilidades para esse buscador: ou terá sobrevivido com $\xi(\tau) \geq 100$, resultado do encontro de 1 ou mais alvos, ou terá morrido, consequência do não encontro com nenhum alvo.
- A fração de sobreviventes em τ será aquela que permitirá que os buscadores continuem na busca para além do seu valor energético inicial. Em outras palavras, podemos pensar que os buscadores iniciam de fato a busca pela sobrevivência após esse tempo de autonomia inicial de caminhada, uma vez que estarão sobrevivendo em tempo maiores em comparação ao tempo de sobrevivência inicial pré-estabelecido τ .
- Se a densidade de alvos na rede é alta, certamente muitos buscadores irão sobreviver após um longo tempo de caminhada (busca). Caso contrário, em baixas densidades de alvos, muitos buscadores irão morrer logo após os primeiros tempos de busca e aqueles que eventualmente sobreviverem num tempo maior, muito provavelmente irão morrer num tempo muito grande. Numa determinada densidade crítica, espera-se a situação em que muitos buscadores morreram mas alguns poucos ainda conseguem sobreviver (mesmo para t muito grande) portanto garantindo a sobrevivência (ou evolução) da espécie. Assim, $0 < \lambda \leq \lambda_c \rightarrow$ evolução da espécie (sobrevivência de alguns ou todos os buscadores) quando $t \rightarrow \infty$, e $\lambda > \lambda_c \rightarrow$ extinção da espécie (morte de todos os buscadores).

Todas essas expectativas supracitadas são baseadas nos resultados computacionais apresentados nesta tese. Com isso, podemos tomar as seguintes regras que mostram a sobrevivência ou morte de um dado buscador do ponto de vista de um processo percolativo:

1. Todos os buscadores iniciam a dinâmica numa rede de densidade λ de alvos a partir de uma mesma configuração de estado (os parâmetros energéticos de busca). A esse estado definimos como sendo a origem do sistema em que todos os buscadores estão vivos. De forma análoga à percolação direcionada, esse estado representa o sítio (ativo) inicial da rede, representado por \bullet na linha 0, conforme figura C.4.
2. Assumimos uma rede quadrada na forma diagonal onde a direção de percolação representa a evolução temporal do sistema, onde cada sítio ativo numa dada linha

²Como colocado nos capítulos 3, o tempo de autonomia inicial de caminhada é o tempo máximo que o buscador pode caminhar e sobreviver sem que nenhum alvo seja encontrado. Portanto tal tempo basicamente depende do custo energético por passo e da energia inicial do buscador, assim sendo definido como $\tau = \xi_0/\alpha$.

da rede representa possíveis estados de sobrevivência (possíveis valores de energia positiva). Como o ganho energético é $g = 100$ e o custo é $\alpha = 1$, então uma possível morte ocorrerá apenas em tempos múltiplos de 100. Isso permite compactar a rede em linhas de forma que a linha $1 \Leftrightarrow t = 100 \Leftrightarrow t = 1$, linha $2 \Leftrightarrow t = 200 \Leftrightarrow t = 2$, ..., linha $n \Leftrightarrow t = n \times 100 \Leftrightarrow t = n$.

3. Se a energia num dado tempo permanecer constante ou aumentar com relação ao tempo anterior, ou seja, $\xi(t) \geq \xi(t-1)$, então uma ligação é aberta com o vizinho a direita \searrow e representa uma sobrevivência positiva.
4. Se $0 < \xi(t) < \xi(t-1)$, então uma ligação é aberta com o sítio vizinho da esquerda \swarrow e representa uma sobrevivência negativa, uma vez que tal buscador está vivo mais perdeu energia com o tempo.
5. Se $0 = \xi(t) < \xi(t-1)$ então a percolação é interrompida (morte do buscador). Essa condição pode ser interpretada como a presença de uma parede na rede que absorve todas as ligações dos sítios ativos com energia nula.

A execução dessa regra para os M buscadores simulados, forma uma rede com sítios ativos e inativos que percola se, após um tempo máximo t_{max} , ao menos 1 buscador sobreviver. Percolar, portanto, significa que a espécie composta por M buscadores conseguiu evoluir devido à sobrevivência de 1 ou mais buscadores. Por outro lado, não percolar implica na extinção da espécie. Portanto, ao variar a densidade de alvos λ , espera-se a formação de *clusters* que irá percolar caso $\lambda \leq \lambda_c$. Um detalhe importante é que cada sítio ativo pode representar mais de um estado energético. Por exemplo, podemos dizer que o sítio ativo (sobrevivência positiva) na linha 1 pode assumir estados de energia $\xi(x=1, t=1) = 100, 200, \dots$ a depender do número de encontros com alvos de cada buscador durante tempo τ , ou seja, durante os 100 primeiros passos. Outro detalhe é que o sítio ativo em $(x=-1, t=1)$ representa todos os buscadores que morreram devido ao não encontro com alvos durante tempo τ . Uma consequência direta é que esse sítio, mesmo que ativo, não formará ligações com nenhum dos seus vizinhos, uma vez que todos os buscadores nessa posição foram mortos (ou seja, absorvidos pela parede).

Em suma, os *clusters* são formados pela coleção de estados energéticos resultante da caminhada dos buscadores, que também podemos chamar de *ensemble* estatístico de sobrevivência. A disposição das ligações na rede, nesse caso, representa o comportamento da taxa de sobrevivência no modelo de buscas aleatórias. O parâmetro de controle das ligação entre os sítios pode ser interpretado como a probabilidade de encontrar alvos no intervalo de tempo $(t, t+1)$, que por sua vez está relacionado com a densidade de alvos no modelo de buscas aleatórias. A seguir temos algumas figuras provenientes dessa regra de percolação.

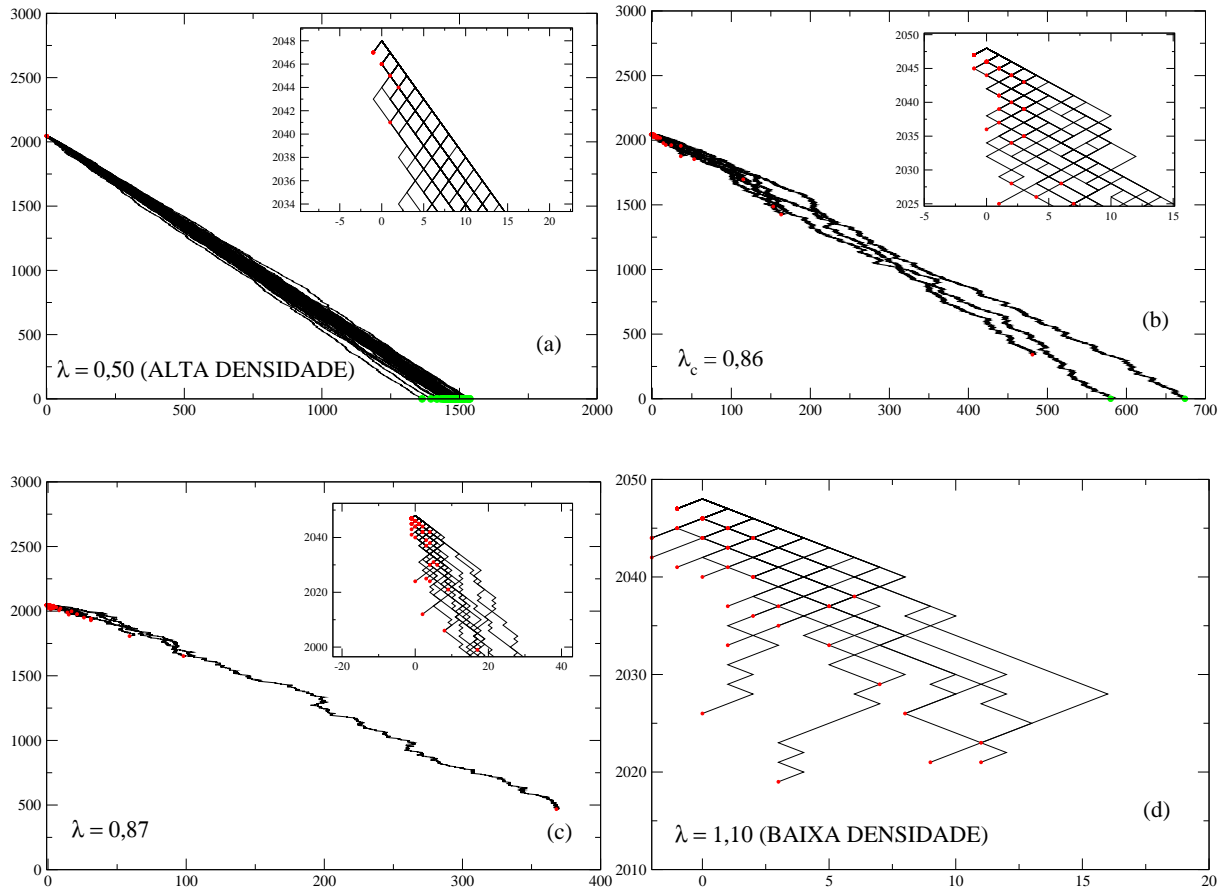


Figura C.6: O conjunto de figuras está relacionado à formação de clusters para diferentes densidades de rede nos casos $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$. (a) Em altas densidades de alvos um número maior de clusters conseguem percolar em relação a baixas densidades (d). As figuras (b) e (c) representam situação crítica, no limiar da transição entre as fase que percolam e que não percolam. Os pontos em vermelho indicam os pontos onde houve absorção (“presença da parede”) e os pontos em verde indicam os clusters que conseguiram percolar.

Na figura C.6, temos os casos onde $\mu_s = 2,0$ e $\mu_t = 2,0$ em 4 situações de interesse: os regimes de altas densidades (a), baixas densidades (d), crítico (b) e logo após o crítico (c). O regime de alta densidade implica que quase sempre $\xi(t) \geq \xi(t-1)$, levando os buscadores para a sobrevivência e, portanto, formando *clusters* que percolam. No zoom da figura (a) podemos observar os poucos buscadores que morreram e que foram absorvidos pela “parede” da rede nos pontos em vermelho. Os pontos da rede que indicam a efetiva percolação estão representados pelos pontos em verde. Em baixas densidades temos a situação em que muitos buscadores morrem logo nos primeiros tempos de busca, como visto em (d). Os pontos em vermelho novamente indicam a absorção de ligação com sítios vizinhos, que representa a quebra de dinâmica devido a morte de um buscador. A situação crítica (b), $\lambda_c = 0,86$ representa o primeiro valor (no sentido de baixas densidades \rightarrow altas densidades) que o sistema começa a percolar. Assim, abaixo desse valor o sistema sempre percola (redes pequenas - altas densidades) e logo acima desse valor (como mostrado em (c)) em diante, o sistema nunca percola (redes grandes, baixas densidades).

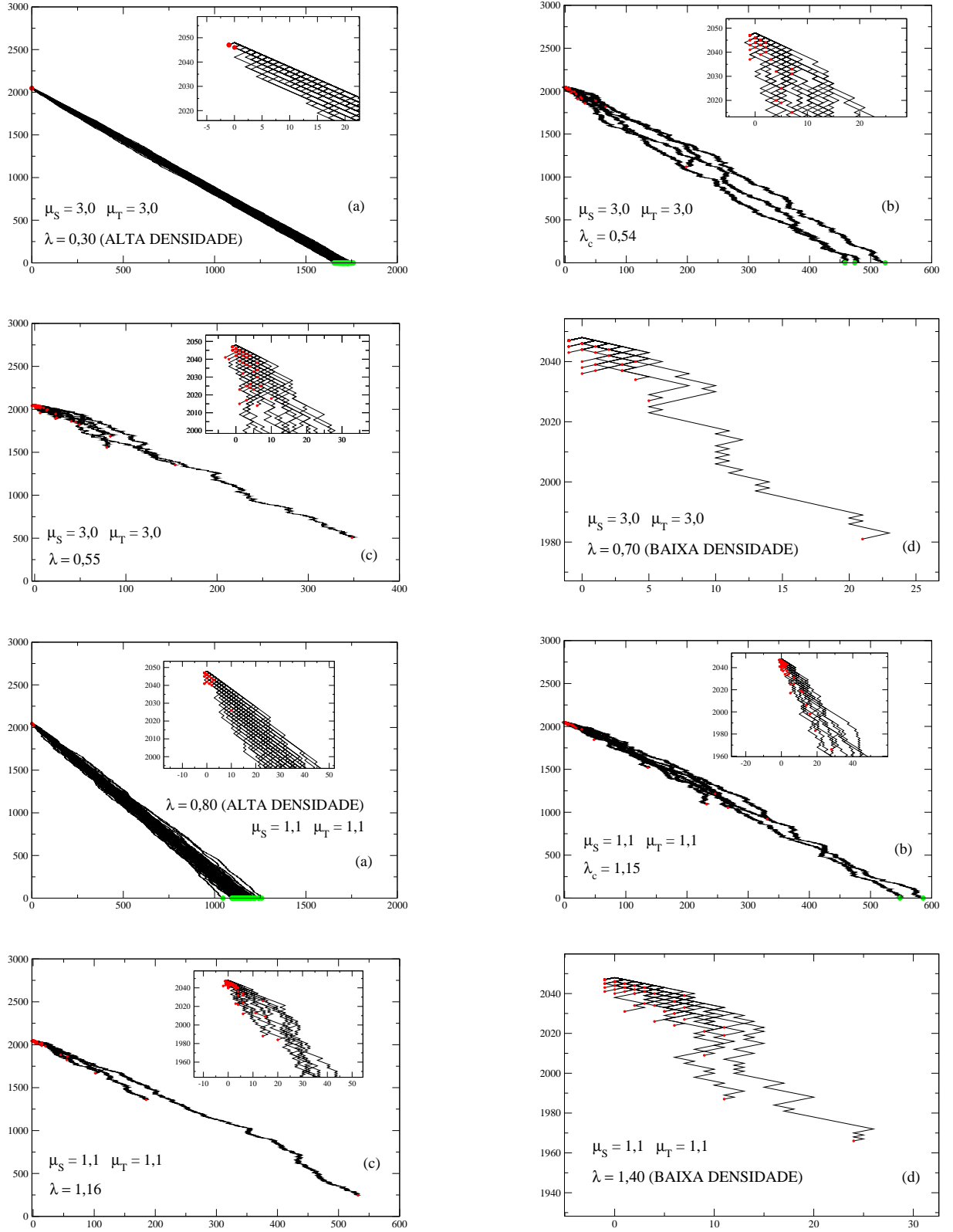


Figura C.7: Conjunto de figuras para $(\mu_s = 1,1, \mu_t = 1,1)$ e $(\mu_s = 3,0, \mu_t = 3,0)$ nos limites de altas densidade (a), baixas densidades (d) e críticos (b) e (c). Comportamentos similares são observados independente do tipo de difusão adotado pelos buscadores e alvos.

Podemos também observar que quanto maior for a densidade de alvos, mais distante estão os *clusters* em relação a reta paralela ao sentido de percolação (tempo) e que passa pelo origem do sistema (estado inicial), indicando uma maior velocidade ou eficiência de sobrevivência. Todas essas características foram observadas também nos demais tipos de difusão dos buscadores e alvos, como observado nas figuras C.7.

Um dado bastante curioso em relação à fração de sobreviventes no modelo de buscas aleatórias é que tal probabilidade em τ tem valor em torno de $\Gamma(\tau) \approx 0,64$ para quaisquer que sejam os pares de difusão adotados pelos buscadores e alvos. Esse valor corresponde justamente à probabilidade crítica que faz percolar as ligações entre sítios numa rede quadrada com ou sem parede [109]. A figura C.8, além de expressar a in-

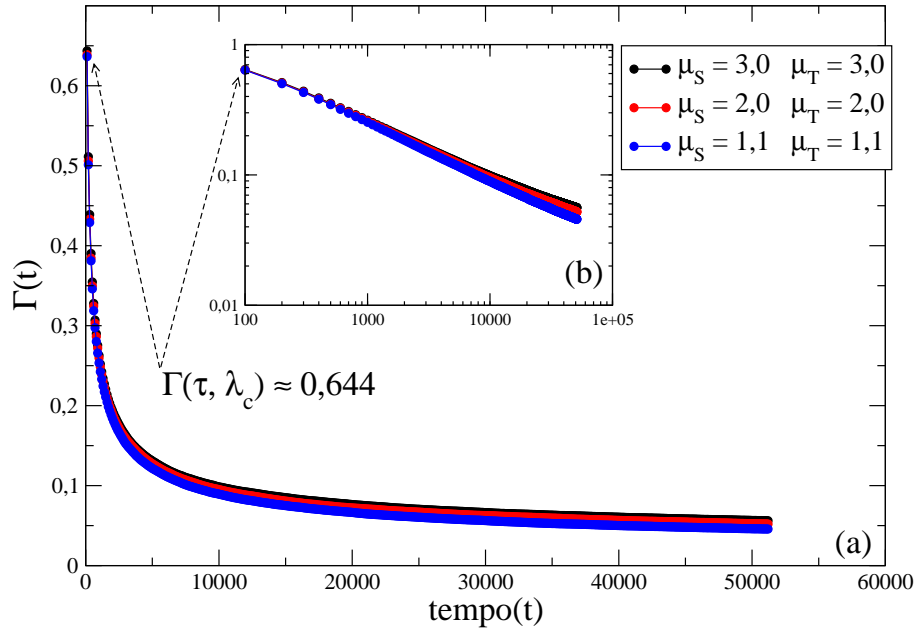


Figura C.8: Taxa de sobrevivência em função do tempo $\Gamma(t, \lambda_c)$ vs. t na rede crítica para algumas combinações de μ_s e μ_t dos caminhantes

variância de escala de $\Gamma(t, \lambda_c)$ como característica da lei de potência presente em pontos críticos, provavelmente esteja informando que a fração mínima de sobreviventes em τ , do ponto de vista de um processo percolativo, deve ser aquele que possibilite a percolação na rede. Assim, $\Gamma(\tau, \lambda_c) \approx 0,644$ é um limite crítico onde acima o sistema leva à fase de sobrevivência e abaixo à fase de extinção. Em outras palavras, $\Gamma(\tau)$ representa a probabilidade de que o sistema possa evoluir, ou percolar. Essa possibilidade apenas existe se ao menos 1 alvo for encontrado pelo buscador, garantindo sua sobrevivência por mais tempo de busca. Todas essas informações oriundas deste processo de mapeamento poderão ser confirmadas caso a configuração da rede e *clusters* formados no regime crítico (bem como o apropriado cálculo das quantidades associadas aos processos percolativos) levem aos expoentes críticos observados no sistema de percolação direcionada com parede. Essa é uma das perspectivas de trabalho futuro desta tese.

Publicações

1.



A LETTERS JOURNAL EXPLORING
THE FRONTIERS OF PHYSICS

March 2012

EPL, **97** (2012) 50005
doi: 10.1209/0295-5075/97/50005

www.epljournal.org

The universality class of random searches in critically scarce environments

C. L. FAUSTINO^{1,2}, M. L. LYRA³, E. P. RAPOSO⁴, G. M. VISWANATHAN^{3,5} and M. G. E. DA LUZ^{1(a)}

¹ Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná - 81531-980, Curitiba-PR, Brazil

² Campus Arapiraca, Universidade Federal de Alagoas - 57309-005, Arapiraca-AL, Brazil

³ Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas - 57072-970, Maceió-AL, Brazil

⁴ Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco 50670-901, Recife-PE, Brazil

⁵ Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte 59078-900, Natal-RN, Brazil

received 11 October 2011; accepted in final form 26 January 2012
published online 2 March 2012

PACS 05.40.-a - Fluctuation phenomena, random processes, noise, and Brownian motion

PACS 05.40.Fb - Random walks and Levy flights

PACS 05.70.Jk - Critical point phenomena

Abstract – We analyze searchers looking for diffusive targets when the formers rely on the net energy gained from the encounters to maintain the process. The system properties are studied at very low target densities, for the searchers at the edge of extinction. We report that superdiffusion for both types of players confers a substantial increase in the searchers survival rate. A continuous phase transition is observed for any search strategy. From the critical exponents, we find that the problem belongs to the same universality class of directed percolation with absorbing walls. We finally discuss the implications of the random search process criticality to the endurance of searchers as a group and eventual connections with the preservation of biological species.

Copyright © EPLA, 2012

2.

PHYSICAL REVIEW E **86**, 061102 (2012)**Dissipative Lévy random searches: Universal behavior at low target density**P. J. Ribeiro-Neto, E. P. Raposo,^{*} and H. A. Araújo*Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901, Recife-PE, Brazil*

C. L. Faustino

Curso de Física, Universidade Federal de Alagoas, Arapiraca-AL, 57309-005, Brazil and Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR, 81531-980, Brazil

M. G. E. da Luz

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR, 81531-980, Brazil

G. M. Viswanathan

Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 59078-900, Brazil and Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 57072-970, Brazil

(Received 22 September 2012; published 4 December 2012)

We investigate the problem of survival at the very low target-density limit and report on a second-order phase transition for one-dimensional random searches in which the energy cost of locomotion is a function of the distance traveled by the searcher. Surprisingly, from analytical calculations (also tested numerically) we find identical critical exponents for arbitrary energy cost functions. We conclude that there is a single universality class that describes this process.

DOI: 10.1103/PhysRevE.86.061102

PACS number(s): 05.40.Fb, 05.70.Jk

3. À publicar:

The Statistical Effects of the Energetic Parameters in Discrete Random SearchesC. L. Faustino^{a,d}, E. P. Raposo^b, G. M. Viswanathan^c, C. E. Fiore^d, M. G. E. da Luz^d^a*Campus Arapiraca, Universidade Federal de Alagoas, 57309-005, Arapiraca-AL, Brazil*^b*Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 50670-901, Brazil.*^c*Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 59078-900, Brazil*^d*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-980, Curitiba-PR, Brazil***Abstract**

We investigate the phase transition in the search process, in which foragers looking for dynamic targets randomly distributed about a 1D lattice. Different combinations of parameters including initial energy of search ξ_0 , energy gained per encounter g and cost energetic per step α have been studied. We found that the system yields a second-order phase transition for a common set of critical exponents independent of the search strategy and the proportional changes of energetic parameters ξ_0 , α and g . On the other hand, our results suggest that specific combinations (to be explained further) of such parameters lead to a continuous change of critical exponents, suggesting the existence of new universality classes. Finally, the importance of these results in ecological context is discussed.

Keywords: Random Processes, Noise, Phase Transition, Random Walks, Lévy Flights

Referências Bibliográficas

- [1] Mirny, L.; Slutsky, M.; Wunderlich, Z.; Tafvizi, A.; Leith, J.; Kosmrlj, A. How a protein searches for its site on DNA: the mechanisms of facilitated diffusion. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 42, n. 43, p. 43013, 2009. [1](#)
- [2] Buldyrev, S. V.; Goldberger, A. L.; Havlin, S.; Peng, C. k.; Simons, M.; Stanley, H. E. Generalised Lévy-walk model for DNA nucleotide sequences. **Physics Review E**, vol. 47, p. 4514, 1993. [1](#)
- [3] Bénichou, O.; Loverdo, C.; Moreau, M.; Voituriez, R. Intermittent search strategies. **Rev. Mod. Phys.**, vol. 83, p. 81-129, 2011. [1](#), [3](#)
- [4] Viswanathan, G. M.; da Luz, M. G. E.; Raposo, E. P.; Stanley, H. E. **The Physics of Foraging**. Cambridge University Press, 2011. [1](#), [4](#), [32](#), [33](#)
- [5] Stephens, D.; Krebs, J. **Foraging Behavior**. Plenum Press, New York, 1987. [1](#)
- [6] Pirolli, P.; Card, S. **Human Factors in Computing Systems ACM**. ACM Press, 1995 [1](#)
- [7] Adamic, L. A.; Lukose, R. M.; Puniyani, A. R.; Huberman, B. A. Search in Power-Law Networks. **Phys. Rev. E**, vol. 64, p. 046135, 2001. [1](#)
- [8] Rudnick, J.; Gasparil, G. **Elements of the Random Walk. An Introduction for Advanced Students and Researchers**. Cambridge University Press, 2004. [1](#)
- [9] Viswanathan, G. M.; Afanasyev, V.; Buldyrev, S. V.; Murphy, E. J.; Prince, P. A.; Stanley, H. E. Lévy flight search patterns of wandering albatrosses. **Nature**, vol. 381, p. 413-415, 1996. [2](#), [4](#), [32](#)
- [10] Viswanathan, G. M.; Buldyrev, S. V.; Havlin, S.; da Luz, M. G. E.; Raposo, E. P.; Stanley, H. E. Optimizing the success of random searches. **Nature**, vol. 401, p. 911-914, 1999. [2](#), [4](#), [22](#), [33](#), [61](#), [62](#)

- [11] Hughes, B. D. **Random Walks and Random Environments: Volume 1**. Oxford University Press, 1995. 2
- [12] Rycroft, C. H.; Bazant, M. Z. **Lecture 1: Introduction to Random Walks and Diffusion**. Thecnical Report, Department of Mathematics - MIT, 2005. 2
- [13] Salinas, S. R. A. O atomismo e a teoria do movimento browniano. **Física na Escola**, vol. 6, n. 1, p. 23-26, 2005. 3
- [14] Lotka, A. J. Contribution to the Theory of Periodic Reaction. **J. Phys. Chem.**, vol. 14, n. 3, p. 271-274, 1910. 3
- [15] Volterra, V. **Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi**. Mem. Acad. Lincei Roma, vol. 2, p. 31-113, 1926. 3
- [16] MacArthur, R. H.; Pianka, E. R. On Optimal use of a patchy environment. **The American Naturalist**, vol. 100, n. 916, p. 603-609, 1966. 3
- [17] Emlen, J. M. The role of time and energy in food preference. **The American Naturalist**, vol. 100, n. 916, p. 611-617, 1966. 3
- [18] Hassell, M. P.; May, R. M. **Journal Animal Ecology**, vol. 43, n. 567, 1974. 3, 32
- [19] Mangel, M.; Clark, C. W. Towards a unified foraging theory. **Ecology**, vol. 67, n. 5, p. 1127-1138, 1986. 3, 98
- [20] Bartumeus, F.; Catalan, J. Optimal search behavior and classic foraging theory. **J. Phys. A.**, vol. 42, n. 434002, 2009. 3
- [21] Bartumeus, F.; Catalan, J.; Viswanathan, G. M.; Raposo, E. P.; da Luz, M. G. E. The influence of turning angles on the success of non-oriented animal searches. **Journal of Theoretical Biology**, vol. 252, vol. 1, p. 43-55, 2008. 3
- [22] Zollner, P. A.; Lima, S. L. Extreme events in population dynamics with functional carrying capacity. **he european Physical Journal - Special Topics**, vol. 205, p. 313-354, 2012 3
- [23] Turchin, P. **Quantitative analysis of movement: measuring and modelling population redistribution in animal and plants**. 1998. 3
- [24] Reynolds, A. M. On the intermitent behavior of foraging animals. **Europhysics Lett.**, vol. 75, p. 517-520, 2006. 3
- [25] Bénichou, O.; Coppey, M.; Moreau, M.; Suet, P-H.; Voituriez, R. A stochastic model for intermittent search strategies. **J. Phys. Cond. Matter**, vol. 17, p. S4275-S4286, 2005. 3

- [26] Lomholt, M. A.; Tal, K.; Metzler, R. Lévy strategies in intermittent search processes are advantageous. **Proc. Natl. Acad. Sci. USA**, vol. 105, n. 32, p. 11055-11059, 2008. 3
- [27] Plank, M. J.; James, A. Optimal foraging: Levy pattern or process? **J. R. Soc. Interface**, vol. 5, p. 1077-1086, 2008. 3
- [28] Bartumeus, F. A random walk approach to the Bak - Sneppen evolution model. **Fractals**, vol. 15, p. 151-162, 2007. 4
- [29] Reynolds, A. Balancing the competing demands of harvesting and safety from predation: Lévy walk searches outperform composite brownian walk searches but only when foraging under the risk of predation. **Physica A - Statistical Mechanics and its Applications**, vol. 389, p. 4740-4746, 2010. 4
- [30] Viswanathan, G. M.; Raposo, E. P.; Bartumeus, F.; Catalan, J.; da Luz, M. G. E. Necessary criterion for distinguishing true superdiffusion from correlated random walk processes. **Phys. Rev. E**, vol. 72, p. 011111, 2005. 4
- [31] Shlesinger, M. F.; Klafter, J. Lévy walks versus Lévy flights. **On Growth and Form: Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics**, p. 279, 1986. 4, 33
- [32] Frisch, U.; Shlesinger, M. F.; Zaslavsky, G. **Lévy Flights and Related Topics in Physics**. Springer, Berlin, 1995. 4, 33
- [33] Raposo, E. P.; Bartumeus, F.; da Luz, M. G. E.; Viswanathan, G. M.; Stanley, H. E. Lévy flights and random searches. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, vol. 42, n. 43, 2009. 4, 22, 33
- [34] Viswanathan, G. M.; Raposo, E. P.; da Luz, M. G. E. Lévy flights and superdiffusion in random search: the biological encounters context. **Phys. Life Rev.**, vol. 5, p. 133-162, 2008. 4, 22, 58
- [35] Bartumeus, F.; Catalan, J. Optimal search behavior and classic foraging theory. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, vol. 42, n. 43, 2009. 4, 58
- [36] Sims, D. W.; Southall, E. J.; Humphries, N. E.; Hays, G. C.; Bradshaw, C. J. A.; Pitchford, J. W.; James, A.; Ahmed, M. Z.; Brierley, A. S.; Hindell, M. A.; Morritt, D.; Musyl, M. K.; Righthon, D.; Shepard, E. L. C.; Wearmouth, V. J.; Wilson, R. P.; Witt, M. J.; Metcalfe, J. D. Scaling laws of marine predator search behaviour. **Nature**, vol. 451, n. 7182, p. 1098-1102, 2008. 4

- [37] Humpphries, N. E.; Queiroz, N.; Dyer, J. R. M.; Pade, N. G.; Musyl, M. K.; Schaefer, K. M.; Fuller, D. W.; Brunnschweiler, J. M.; Doyle, T. K.; Houghton, J. D. R.; Hays, G. C.; Jones, C. S.; Noble, L. R.; Wearmouth, V. J.; Souhall, E. J.; Sims, D. W. Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators. **Nature**, vol. 465, n. 7301, p. 1066-1069, 2010. 4
- [38] Shlesinger, M. F. Search Research. **Nature**, vol. 443, p. 281-282, 2006. 4
- [39] Albano, E. V. Branching annihilating Lévy flights: Irreversible phase transitions with long-range exchanges. **Europhysics Letters**, vol. 34, p. 97-102, 1996. 4, 33
- [40] Albano, E. V. Irreversible phase transitions in contact processes with Lévy exchanges and long-range interactions. **Physical Review E**, vol. 54, p. 3436-3441, 1996. 4, 33
- [41] da Luz, M. G. E.; Buldyrev, S. V.; Havlin, S.; Raposo, E. P.; Stanley, H. E.; Viswanathan, G. M.; Improvements in the statistical approach to random lévy flight searches. **Physica A**, vol. 295, p. 89-92, 2001. 4
- [42] Edwards, A. M.; Phillips, R. A.; Watkins, N. W.; Freeman, M. P.; *et al.* Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer. **Nature**, vol. 449, p. 1044-1048, 2007. 4
- [43] Bartumeus, F. Behavioral intermittence, lévy patterns, and randomness in animal movement. **Oikos**, vol. 118, 2009. 4
- [44] Humphries, N. E.; Weimerskirch, H.; Queiroz, N.; Southall, E. J.; Sims, D. W. Foraging sucess of biological lévy flights recorded in situ. **Proceedings of the National Academy of Sciences - PNAS**, vol. 109, n. 19, p. 7169-7174, 2012. 4
- [45] Faustino, C. L.; da Silva, L. R.; da Luz, M. G. E.; Raposo, E. P.; Viswanathan, G. M. Search dynamics at the edge of extinction: anamalous diffusion as a critical survival state. **Europhysics Letters**, vol. 77, p. 30002, 2007. xiii, xiv, xx, 5, 22, 32, 39, 41, 61, 62
- [46] Faustino, C. L.; Lyra, M. L.; Raposo, E. P.; Viswanathan, G. M.; da Luz, M. G. E. The universality class of random searches in critically scarce environments. **Europhysics Letters**, vol. 97, p. 50005, 2012. 5, 33, 99
- [47] Ribeiro-Neto, P. J.; Raposo, E. P.; Araújo, H. A.; Faustino, C. L.; da Luz, M. G. E.; Viswanathan, G. M. Dissipative lévy random searches: universal behavior at low target density. **Physical Review E**, vol. 86, p. 061102, 2012. 6
- [48] Kazmier, L. J. **Schaum's Outline of Business Statistics**. Schaum, 2003. 7, 11

- [49] Jones, D. **Pharmaceutical Statistics**. Pharmaceutical Press, 2001. 7, 11
- [50] Dennerly, P.; Krzwichi, A. **Mathematics for physicists** Dover, 1996. 10, 15
- [51] Laplace, P. S. **Théorie Analytique des Probabilités**. Gauthier-Villars, Paris, 1812. 11
- [52] Pólya, G. Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. **Math. Z.**, vol. 8, p. 171-181, 1935. 11
- [53] Lyapounov, A. M. Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités. **Mem. Acad. Sci. St. Petersburg**, vol 12, p. 1-24, 1901. 11
- [54] Lindeberg, J. W. Eine neue Herleitung des exponentialgesetzes in der wahrscheinhkeitsrechnung. **Math. Zeitsch.**, vol. 15, p. 211-225, 1922. 11
- [55] Lindeberg, J. W. Sur la loi de Gauss. **C. R. Acad. Sci. Paris**, vol. 174, p. 1400-1402, 1922. 11
- [56] Lévy, P. Sur le rôle de la loi de Gauss dans la theories des erreurs. **C. R. Acad. Sci. Paris**, vol. 174, p. 855-857, p. 1682-1684, 1922. 11
- [57] Lévy, P. Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques. **C. R. Acad. Sci. Paris**, vol. 175, p. 854-856, 1922. 11
- [58] Lévy, P. **Théorie de l'Addition des variables aléatoires**. Gauthier-Villars, 1927. 11, 15
- [59] Feller, W.; Orey, S. A renewal theorem. **J. Math. Mech.**, vol 10, p. 619-624, 1961. 11
- [60] Lévy, P. Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendants ou enchainées. **J. Math. Pures Appl.**, vol. 14, n. 8, p. 347-402, 1935. 11
- [61] Kallenberg, O. **Foundations of Modern Probability**. New York, Springer, 1997. 12, 13, 15, 19
- [62] Heyde, C. C.; Seneta, E. **I. J. Bienaymé: statistical theory anticipated**. New York, Springer-Verlag, 1977. 12, 15, 19
- [63] Bercovice, H.; Pata, V.; Biane, P. Stable laws and domains of attraction in free probability theory. **The Annals of Mathematics**, vol. 149, n. 3, p. 1023-1060, 1999. 12, 19
- [64] Nolan, J. P. **Stable Distribution: Models for Heavy Tailed Data**. American University, 2008. 12

- [65] Fisher, H. **A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory**. Springer, New York, 2011. 12, 19
- [66] Feller, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**. A John Wiley & Sons Inc, New York, vol. 1 e 2, ed. 3, 1968. 12, 16, 17, 19, 104
- [67] Arce, G. R. **Nonlinear Signal Processing: A Statistical Approach**. A John Wiley & Sons Inc, New Jersey, 2005. 12, 19
- [68] Samorodnitsky, G.; Taqqu, M. S. **Non-Gaussian Random Processes**. Chapman & Hall/CRC, New York, 1994. 12, 19
- [69] Lévy, P. **Calcul des probabilités**. Gauthier-Villars, Paris, 1925. 15, 19
- [70] Klages, R.; Radons, G.; Sokolov, I. M. **Anomalous Transport: Foundations and Applications**. Wiley, 2008. 20
- [71] ben-Avraham, D.; Havlin, S. **Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems**. Cambridge Printer University, 2004. 20
- [72] Yakimiv, A. L. **Probabilistic Applications of Tauberian Theorems**. Leiden-Boston VSP, 2005. 20
- [73] Coles, S. **An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values**. Springer, 2001. 20
- [74] da Luz, M. G. E.; Grosberg, A.; Raposo, E. P.; Viswanathan, G. M. The Random Search Problem: Trends and Perspectives. **Journal Of Physica A - Mathematical and Theoretical**, vol. 42, p. 430301, 2009. 22, 23
- [75] Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Stein, C. **Introduction to Algorithms**. MIT Press and McGraw-Hill, p. 979-983, 2001. 22
- [76] Raposo, E. P.; Buldyrev, S. V.; Da Luz, M. G. E.; Santos, M. C.; Stanley, H. E.; Viswanathan, G. M. Dynamical robustness of lévy search strategies. **Physical Review Letters**, vol. 91, n. 24, p. 1-4, 2003. 22, 33
- [77] Santos, M. C.; Raposo, E. P.; Viswanathan, G. M.; Da Luz, M. G. E. Optimal random searches of revisitable targets: crossover from superdiffusive to ballistic random walks. **Europhysics Letters**, vol. 67, n.734, 2004. 22, 33
- [78] Bartumeus, F.; Catalan, J.; Fulco, U. L.; Lyra, M. L.; Viswanathan, G. M. Optimizing the encounter rate in biological interactions: Lévy versus Brownian strategies. **Phys. Rev. Lett.**, vol. 88, p. 097901, 2002. (Erratum): vol. 89, p. 109902, 2002. 24, 58

- [79] Dilão, R. A ciência do sistema complexo. **Técnica**, vol. 1, p. 5-18, 1995. 24
- [80] Souza, G. M.; Buckeridge, M. S. Sistemas complexos: novas formas de ver a botânica. **Revista Brasil Botânica**, vol. 27, n. 3, p. 407-419, 2004. 24
- [81] Sornette, D. **Critical Phenomena in Natural Sciences**. Springer, 2004. 26
- [82] Gléria, I. M.; Matsushita, R.; da Silva, S. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 26, n. 2, p. 99-108, 2004. 5, 26
- [83] McCoy, B. M. **The two-dimensional Ising model**. Harvard University Press, 1973. 26, 42, 45
- [84] Hinrichse, H. Non-equilibrium phase transitions **Physica A: Sattistical Mechanics and its Applications**, vol. 369, n. 1, p. 1-28, 2006. 26, 27, 51
- [85] Callen, H. B.; Welton, T. A. Irreversibility and generalized noise. **Physics Review**, vol. 83, p. 34-40, 1951. 26
- [86] Auyang, S. Y. **Foundations of Complex-System Theories in Economics, Evolutionary Biology and Statistica**. Cambribge - USA, 1999. 26, 31
- [87] Ódor, G. Universality class in nonequilibrium lattice systems. **Reviews of Modern Physics**, vol. 76, 2004. 26, 31
- [88] Salinas, S. R. A. **Introdução à Física Estatística**. Edusp, 1998. 26
- [89] Huang, K. **Statistical Mechanics**. Jonh Wiley & Sons, Ed. 2, 1987. 26, 58
- [90] Mortimer, R. G. **Physical Chemistry**. Academic Press, 2008. 27
- [91] Uzunov, D. I. **Introduction to the Theory of Critical Phenomena**. World Scientific Publishing, Singapure, 1993. 27, 58
- [92] Brankov, L.; Danchev, D. M.; Tonchev, N. S.; Brankov, J. G. **Theory of Critical Phenomena in Finite-Size Systems: Scaling and Quantum Effects**. World Scientific Publishing Company, 2000. 27
- [93] Nordblad, P. Magnetocaloric materials: strained relations. **Nature Materials**, vol. 12, pag. 11-12, 2013. xii, 28
- [94] Fisher, M. E. **Summer School Erico Fermi**. M.S. Green - Academic Press, New York, 1971. 29, 46

- [95] Cardy, J. **Scaling and Renormalization in Statistical Physics**. Cambridge University Press, 1996. 29, 45
- [96] Fisher, M. E. **Scaling, Universality and Renormalization Group Theory**. Lectures Notes, Advanced Course on Critical Phenomena, South Africa, 1982. 29, 45
- [97] Plascak, J. A.; da Silva, J. K. L. On the equivalence of finite size scaling renormalization group and phenomenological renormalization. **Physica A**, vol. 233, p. 551-559, 1996. 30
- [98] Kadanoff, L. P.; Gotze, W.; Hamblen, D.; Hecht, R.; Lewis, E. A. S.; Palciauskas, V. V.; Rayl, M.; Swift, J.; Aspnes, D.; Kane, J. W. Static phenomena near critical points: theory and experiments. **Rev. Mod. Phys.**, vol. 39, n. 395, 1967. 30
- [99] Michael, K. **The Casimir Effect in Critical Systems**. World Scientific Publishing Company, 1994. 31
- [100] Sims, D. W.; Witt, M. J.; Richardson, A. J.; Southall, E. J.; Metcalfe, J. D. Proc. R. Soc. London. **Ser. B**, vol. 273, n. 1195, 2006. 32
- [101] Boyer, D.; Miramonts, O.; Ramos-Fernandez, G.; Mateos, J. L.; Cocho, G. Behav. Ecol. Sociobiol. **Physica A**, vol. 342, n. 329, 2004. 32
- [102] Bartumeus, F. F. **Lévy Processes in Animal Movement and Dispersal**. Universitat de Barcelona - UB, 2005. 34, 104
- [103] Yeomans, J. M. **Statistical Mechanics of Phase Transitions**. Oxford University Press, Oxford, 1992. 43, 58
- [104] Ben-Avrham, D. **Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered**. Cambridge - USA, 2000.
- [105] Shlesinger, M. F. Random searching. **J. Phys. A**, vol. 42, 2009.
- [106] Buldyrev, S. V.; Havlin, S.; Kasakov, A. Ya.; da Luz, M. G. E.; Raposo, E. P.; Stanley, H. E.; Viswanathan, G. M. Average time spent by lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries. **Phys. Rev. E**, vol. 64, n. 041108, 2001. 60
- [107] Buldyrev, S. V.; Gitterman, M.; Havlin, S.; Kazakov, A., da Luz, M.; Raposo, E.; Stanley, H.; Viswanathan, G. Properties of lévy flights on an interval with absorbing boundaries. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, vol. 302, p. 1-4, 2001. 60

- [108] **Variation of polarisation towards the Curie point in differently ordered systems.** DoITPoMS Teaching and Learning Packages - University of Cambridge. <http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/pyroelectricity/behaviourcuriepoint.php>.
- [109] Essam, J. W.; Guttman, A. J.; Jensen, I.; TanlaKishani, D. Directed percolation near a wall. **J. Phys. A**, vol. 29, p. 1619-1628, 1996. 54, 117, 119, 125
- [110] Sapoval, B.; Rosso, M.; Gouyet, J. F. The fractal nature of a diffusion front and the relation to percolation. **J. Physique Letters**, vol. 46, p. 149-156, 1985. 93
- [111] Henkel, M.; Hinrichsen, H.; Lubeck, S. **Non-Equilibrium Phase Transition.** Springer - Dordrecht, vol. 1, 2008. 51
- [112] Spotila, J. R. **Sea Turtles: A Complete Guide to Their Biology, Behavior, and Conservations.** Johns Hopkins University Press, 2004. 81
- [113] Djordjevic, W.; Fulde, P.; Peschel, I; **J. Phys. A**, vol. 15, p. 405, 1982. 93
- [114] Stauffer, D. **Phys. Rep**, vol. 54, p. 1, 1979. 93
- [115] Samways, M. J.; Lu, S. Key traits in a threstened butterfly and its common sibling: implications for conservations. **Biodiversity and Conservation**, vol. 16, p. 4095-4107, 2007. 98
- [116] Newton, I. Can conditions experienced during migration limit the population levels of birds? **Journal of Ornithology**, vol. 147, p. 146-166, 2006. 98
- [117] Lescroel, A.; Ballard, G.; Toniolo, V.; Barton, K. J.; Wilson, P. R.; Lyver, P.; Ainley, G. Working less to gain more: when breeding quality relates to foraging efficiency. **Ecology**, vol. 91, n. 7, p. 2044-2055, 2010. 99
- [118] Alroy, J. Dynamics of origination and extinction in the marine fossil record. **Proceedings of the National Academy of Siences**, vol. 105, p. 11536-11542, 2008. 99
- [119] Broadbent, S. R.; Hammersley, J. M. **Proc. Camb. Phil. Soc.**, vol. 53, p. 629, 1957. 114
- [120] Grassberger, P. **J. Phys. A: Math. Gen.**, vol. 18, p. 215, 1985. 114
- [121] Dhar, D. **J. Phys. A: Math. Gen.**, vol. 20, p. 847, 1987. 114
- [122] Schulman, L. S.; Seiden, P. E. **J. Stat. Phys.**, vol 27, p. 83, 1982. 114
- [123] Fishman, G. **Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications.** Springer, 2011. 116

-
- [124] Stauffer, D. **Introduction to Percolation Theory**. Taylor and Francis, Londres, 1985. 45, 117
- [125] Lauritsen, K. B.; Sneppen, K.; Markosová, M.; Jensen, M. H. Directed percolation with an absorbing boundary. **Physica A**, vol. 247, p. 1-9, 1997. 119
- [126] Essam, J. W.; Guttman, A. J.; Jensen, I.; Tanlakishami, D. **J. Phys. A**, vol. 29, p. 1619, 1996. 119
- [127] Scholgl, F. **Z. Phys.**, vol. 253, p. 147, 1972. 119
- [128] Grassberger, P.; de la Torre, A. **Ann. phys.**, vol. 122, p. 373, 1979. 119
- [129] Pomeau, Y. **Physica D**, vol. 23, p. 3, 1986. 119
- [130] Chaté, H.; Manneville, P. **Phys. Rev. Lett.**, vol. 58, p. 112, 1987. 119

Índice Remissivo

- Albert Einstein, 3
Albratroz, 4
Alvos, 2
- Balanço energético, 66, 85
Busca aleatória, 33, 67
Busca destrutiva, 22, 33, 34, 90, 91
Busca não destrutiva, 22, 33
Buscadores, 2, 4
Buscas aleatórias, 1–6, 24
- Caminhada aleatória, 1–3, 10, 33
Caminhada balística, 32, 40
Caminhada browniana, 40
Caminhada de lévy, 4, 5, 25, 32, 33
Caminhadas aleatórias correlacionadas, 3
Caminhadas brownianas compostas, 3
Caminhadas intermitentes, 3
Classe de universalidade, 5, 65, 79, 81, 83, 86, 120
Clusters, 114
Collin Clark, 3
Comprimento de correlação, 117
Condições periódicas de contorno, 108
Criticalidade, 33
Custo de locomoção, 6
- Densidade crítica, 121
Densidade de alvos, 32–34, 39, 41, 82, 121, 125
- Desvio padrão, 10, 11
Difusão anômala, 1
Dimensão temporal, 119
Dimensionalidade, 23
Dinâmica de busca, 2, 5, 104
Dinâmica Populacional, 3
Distribuição binomial, 8, 11
Distribuição de cauchy, 19
Distribuição de energia, 72, 75, 79
Distribuição de lévy, 4, 5, 19
Distribuição de probabilidade, 104
Distribuição gaussiana, 7, 19
Distribuição normal, 5, 7, 10, 11
Distribuições estáveis, 17, 18
DNA, 1
- Efeito de discretização, 76
Eficiência de busca, 33
Emlen, 3
Energia inicial, 6
Equações de movimento, 108
Espécie, 32
Estado estacionário, 67
Estado irreversível, 5
Estratégia, 4
Estratégia de busca, 1, 2, 32, 34, 42
Estratégias, 5
Evolução, 2, 5
Expoente crítico, 26, 30, 31, 43, 46, 65, 68,

- 74, 84, 87, 117, 119
- Extinção, 2, 5, 41, 69, 86, 121, 125
- Fenômenos críticos, 1, 26, 70, 114
- Fisher, 45
- Fluido, 3
- Flutuação, 39
- Foraging, 1, 3
- Forrageamento, 67
- Função característica, 17
- Função de correlação, 116
- Função de probabilidade, 8
- Função densidade de probabilidade, 12, 17
- Função distribuição, 106
- Função inversa, 104
- Funções quadráticas, 112
- Hassell, 3
- Internet, 1
- Invariância de escala, 25
- Karl Pearson, 2
- Laplace, 11
- Lei de potência, 25, 30, 33, 47, 105, 125
- Leis de escala, 117
- Leis de probabilidade, 104
- Limite termodinâmico, 115, 117
- Linguagem computacional, 113
- Lord Rayleigh, 2
- Lotka, 3
- Lyapounov, 11
- Método de inversão, 104
- Método de Monte Carlo, 116
- MacArthur, 3
- Mapeamento, 120, 125
- Marc Mangel, 3
- May, 3
- Mecânica estatística, 15
- Mecanismos de busca, 24
- Modelo, 108
- Modelo de busca, 113
- Modelo de Ising, 42
- Movimento browniano, 3, 38, 107
- Número de encontros, 83
- Parâmetro de controle, 27, 122
- Parâmetro de dispersão, 17
- Parâmetro de ordem, 5, 27, 30, 31, 65, 67, 76, 80
- Parâmetros energéticos, 2, 6, 72, 121
- Partículas, 3
- Paul lévy, 11
- Percolação direcionada, 35, 114, 118
- Percolação por ligação, 115
- Percolação por sítio, 115
- Petróleo, 1
- Ponto crítico, 26, 27, 72, 73
- Predador, 1, 3, 4
- Probabilidade binomial, 8
- Probabilidade crítica, 115, 117
- Probabilidade de ocupação, 114
- Probabilidade de percolação, 116
- Processos aleatórios, 7
- Processos de busca, 2, 3, 32, 39
- Processos de contato, 35
- Processos estocásticos, 1
- Raio de visão, 33, 34, 90, 91, 111
- Random walk, 2
- Rastreamento, 4
- Reação-difusão, 33
- Regressão polinomial, 68, 70, 77
- Renormalização numérica, 79, 115
- Robert Brown, 3
- Simetria, 10
- Simulação, 110
- Sistema de tamanho finito, 117
- Sistema para-ferromagnético, 31

- Sistemas complexos, 1, 24, 25
- Sobrevivência, 2, 5, 32, 34, 41
- Taxa de encontros, 4, 33
- Taxa de sobrevivência, 41, 42, 65, 67, 68, 84, 122
- Tempo de autonomia, 67, 72, 76
- Teorema central do limite, 4, 11, 15
- Teorema de Cauchy, 15
- Teoria da percolação, 114
- Teoria de escala, 115
- Tese, 2
- Trajectoria balística, 32
- Trajectorias, 2
- Transformações inversas, 104
- Transição de fase, 41
- Transição de fase de primeira ordem, 26
- Transição de fase de segunda ordem, 26
- Transição geométrica, 115
- Transições de fase, 5, 26, 27, 65, 67, 114, 117
- Universalidade, 26, 31
- Variância de escala, 125
- Volterra, 3
- Voos de lévy, 4, 5